পাটীগণিত
ও
বীজগণিত

শ্রীকেশব চন্দ্র নাগ

Recommended by the West Bengal Board of Secondary Education as a Text Book for Class IX of all Schools of West Bengal.
[Vide Notification NO. T. B./74/IX/AA/39 and also Board's Letter No. 10367/G dated 24. 11. 75.]

পাটীগণিত ও বীজগণিত

[নবম শ্রেণীর জন্য]

[সংশোধিত ও নূতন সংস্করণ]

(বস্তুভিত্তিক আদর্শ প্রশ্ন-সহ)

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

অবসরপ্রাপ্ত প্রধান শিক্ষক, মিত্র ইন্‌ষ্টিট্যুশন্ (ভবানীপুর), গ্রন্থকার, আধুনিক গণিত (VII), (VIII) ও নব পাটীগণিত (VI), মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত, Madhyamik Addl. Math., জ্যামিতি ও পরিমিতি (IX), Arithmetic & Algebra (IX) & (X), Geometry & Mensuration (IX), Geometry, Mensuration & Trigonometry (X), Modern Math. (VII) & (VIII), সেকেণ্ডারী ম্যাথামেটিক্স (সহায়িকা) (IX & X), Higher Secondary Mathematics (Beng. & Eng.) Vol. I & II (XI & XII), etc.

ক্যালকাটা বুক হাউস

১/১, বঙ্কিম চাটার্জি স্ট্রীট, কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক :
শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল,
ক্যালকাটা বুক হাউস
১।১, বঙ্কিম চাটার্জি স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

মুদ্রাকর :
শ্রীপবিত্রলাল দত্ত
প্রিন্টোগ্রাফ
১০১, বৈঠকখানা রোড
কলিকাতা-৭০০০০৯

নিরঞ্জন দাস
দাস প্রিন্টার্স
১৭, বুদ্ধ ওস্তাগর লেন
কলিকাতা-৭০০০০৯

প্রথম মুদ্রণ : অক্টোবর, ১৯৭৩
পরিমার্জিত দ্বিতীয় সংস্করণ : আগস্ট, ১৯৭৪
পুনর্মুদ্রণ : জানুয়ারী, ১৯৭৫
সংশোধিত নূতন সংস্করণ : আগস্ট, ১৯৭৫
পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারী, ১৯৭৬
,, : ডিসেম্বর, ১৯৭৬
অনুমোদিত সংস্করণ, : ফেব্রুয়ারী ১৯৭৭

মূল্য : তিন টাকা নব্বই পয়সা মাত্র

NEW SYLLABUS

CLASS IX

Arithmetic (15 marks)

Ratio, Proportion and Percentage. Problems may be solved Algebraically.

Algebra (30 marks)

1. Revision of previous work.
2. Harder problems leading to equations—simple and simultaneous.
3. Graphs of simple equation—Application.

9704

পরিমার্জিত সংস্করণের ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ 1974 সাল হইতে নবম শ্রেণীর পাটীগণিত ও বীজগণিতের নূতন পাঠ্যক্রম প্রবর্তিত করায় পূর্বে প্রচলিত আমার গণিত পুস্তকের সকল বৈশিষ্ট্য বজায় রাখিয়া এই নূতন পাঠ্যক্রম অনুসারে 1973 সালে নূতনভাবে এই পুস্তক প্রণয়ন করি।

এখন এই পুস্তকের পরিমার্জিত সংস্করণ প্রকাশ করা হইল। সময় স্বল্পতার জন্য গত বৎসর লেখা ও প্রকাশনার কাজ ত্বরান্বিত করিতে হওয়ায় সামান্য কিছু ত্রুটি থাকিয়া যায়। উহা সংশোধনের জন্য, কিছু বিষয় নূতন ও সহজভাবে ছাত্র-ছাত্রীদের বুঝাইবার জন্য এবং পর্ষৎ কর্তৃক গণিত পুস্তক রচনায় **নির্দেশক পুস্তক** (**guide book**) শেষে প্রকাশিত হওয়ায় **পুস্তকটিকে** পরিবর্তন করিতে হইল।

এখন নূতন ও পুরাতনের সন্ধিক্ষণ। পুরাতন গণিত ও নূতন গণিত (New mathematics)-এর মধ্যে কোন্‌টি গৃহীত হইবে সে বিষয়ে পরীক্ষাও চলিয়াছে। নূতন গণিতের যে সকল বিষয়ের সহিত ছাত্রদের পরিচয় হওয়া উচিত (বিশেষভাবে সেট তত্ত্ব) তাহা এবং নির্ণায়ক (determinant) পরিশেষে সংযোজিত হইল। ধীরে ধীরে নূতন গণিতের বিষয়বস্তু ছাত্রদের যাহাতে আয়ত্তে আসে ও এই বিষয়ে উৎসাহী হয় তাহারই প্রথম প্রয়াস করা হইয়াছে। সাধারণ ছাত্র-ছাত্রীদের প্রথমে ইহা পাঠে অনীহা দেখা দিতে পারে মনে করিয়াই পরিশিষ্টে আলোচনা করা হইয়াছে।

দৈনন্দিন জীবনের নানা ক্ষেত্রে গণিতের যে ব্যবহারিক প্রয়োজন ও প্রয়োগ হয়, সেইদিকে দৃষ্টি রাখিয়া অঙ্কগুলিকে পুনর্বিন্যাস করা হইয়াছে। **গণিতের ইতিহাস** ও প্রাচীন প্রখ্যাত গাণিতিকদের জীবনী পাঠে ছাত্র-ছাত্রীরা প্রেরণা লাভ করিবে, প্রাচীন ভারতীয় ঐতিহ্যের প্রতি শ্রদ্ধাশীল হইবে ও গণিত পাঠের ভীতি দূরীভূত হইয়া নব উৎসাহে ইহা অধ্যয়ন করিবে মনে করিয়া পরিশিষ্টে ইহা সংযোজিত হইল। পরীক্ষার্থীদের সুবিধার জন্য পরিশিষ্টে বস্তুভিত্তিক আদর্শ প্রশ্নও সংযোজিত করা হইয়াছে।

আশা করি, সুধী শিক্ষকমণ্ডলী এই বৃদ্ধ অবসরপ্রাপ্ত শিক্ষকের দীর্ঘ দিনের অভিজ্ঞতায় শেষ জীবনে প্রণীত এই সংস্করণটিও পূর্বের ন্যায় সাদরে গ্রহণ করিবেন।

পরিশেষে, যে সকল শিক্ষক মহাশয় ও আমার স্নেহাস্পদ ছাত্রবৃন্দ এই সংস্করণ প্রকাশনায় পরামর্শ দিয়াছেন তাঁহাদের প্রতি কৃতজ্ঞতা জানাই। আমার পুত্র শ্রীমান দেবীপ্রসাদের ঐকান্তিক প্রচেষ্টায় সত্বর এই গ্রন্থের প্রকাশ সম্ভব হইয়াছে।

গুড়াপ, হুগলী
16. 7. 74

ইতি
॥ গ্রন্থকার ॥

সূচীপত্র

পাটীগণিত

বীজগণিত

পাটীগণিত

[ARITHMETIC]

● নবম শ্রেণী ●

এইপাটীগণিতে ব্যবহৃত বিভিন্ন প্রক্রিয়ার চিহ্ন ও তাহাদের অর্থ

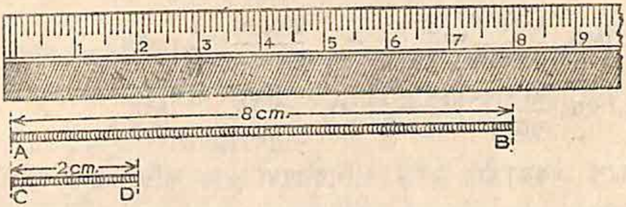
$+$	চিহ্ন :	যোগ চিহ্ন (যথা $3+2=5$)
$-$	চিহ্ন :	বিয়োগ চিহ্ন (যথা $3-2=1$)
$\times$	চিহ্ন :	গুণ চিহ্ন (যথা $3\times2=6$)
$\div$	চিহ্ন :	ভাগ চিহ্ন (যথা $10\div5=2$)
$=$	চিহ্ন :	সমান চিহ্ন (যথা $4+3=7$)
$:$	চিহ্ন :	অনুপাতের চিহ্ন (যথা $5 : 3$)
$::$	চিহ্ন :	সমানুপাতের চিহ্ন (যথা $3 : 4 :: 6 : 8$)
$\surd$	চিহ্ন :	বর্গমূলের চিহ্ন (যথা $\sqrt{16}$ অর্থাৎ 16-র বর্গমূল)
$\propto$	চিহ্ন :	ভেদচিহ্ন (যথা দ্রব্যমূল্য $\propto$ দ্রব্যের পরিমাণ)
$\sqrt[3]{}$	চিহ্ন :	ঘনমূলের চিহ্ন (যথা $\sqrt[3]{27}=3$)
$\%$	চিহ্ন :	শতকরার চিহ্ন (যথা 5% অর্থাৎ শতকরা 5)
$<$	চিহ্ন :	এই চিহ্ন দ্বারা ক্ষুদ্রতর বুঝায় (যথা $5<6$)
$>$	চিহ্ন :	এই চিহ্নে বৃহত্তর বুঝায় (যথা $7>4$)
$\equiv$	চিহ্ন :	এই চিহ্নে বুঝায় সর্বতোভাবে সমান
( )	চিহ্ন :	ইহাকে লঘুবন্ধনী বলে
$\overline{\quad}$	চিহ্ন :	ইহাকে রেখাবন্ধনী বলে (যথা $\overline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$)
{ }	চিহ্ন :	ইহাকে ধনুর্বন্ধনী বলে
[ ]	চিহ্ন :	ইহাকে গুরুবন্ধনী বলে।

[এই চারিপ্রকার বন্ধনী ব্যবহৃত হয়]

$\odot$	চিহ্ন :	ইহা একপ্রকার গুণ চিহ্ন (যথা 3.5 অর্থাৎ 5×3)।

পাটীগণিত

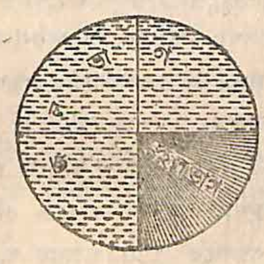
অনুপাত (Ratio)



1 নং চিত্র

§ 1.1. অনুপাতের সংজ্ঞা :

1নং চিত্রে AB ও CD দুইটি দণ্ড দেখানো হইয়াছে। AB দণ্ডের দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. ও CD দণ্ডের দৈর্ঘ্য 2 সে. মি.। সুতরাং AB দণ্ডের দৈর্ঘ্য CD দণ্ডের দৈর্ঘ্যের 4 গুণ, বা CD দণ্ডের দৈর্ঘ্য AB দণ্ডের দৈর্ঘ্যের 4 ভাগের 1 ভাগ অর্থাৎ $\frac{1}{4}$ অংশ।



2 নং চিত্র



3 নং চিত্র

2নং চিত্রে পৃথিবীর জলভাগ ও স্থলভাগের তুলনামূলক আয়তন দেখান হইয়াছে। দেখা যাইতেছে যে 3 ভাগ জল ও 1 ভাগ স্থল। সুতরাং জলভাগ স্থলভাগের 3 গুণ, বা স্থলভাগ জলভাগের 3 ভাগের 1 ভাগ অর্থাৎ $\frac{1}{3}$ অংশ।

3নং চিত্রে দেখা যায় যে পিতার বয়স 50 বৎসর ও পুত্রের বয়স 20 বৎসর। সুতরাং পিতার বয়স পুত্রের বয়সের $\frac{5}{2}$ গুণ, বা পুত্রের বয়স পিতার বয়সের 5 ভাগের 2 ভাগ অর্থাৎ $\frac{2}{5}$ অংশ।

অতএব তুলনামূলক মান নির্ণয়ে—

1নং চিত্রে, $\frac{\text{AB-র দৈর্ঘ্য}}{\text{CD-র দৈর্ঘ্য}}=\frac{4}{1}$ বা, $\frac{\text{CD-র দৈর্ঘ্য}}{\text{AB-র দৈর্ঘ্য}}=\frac{1}{4}$;

2নং চিত্রে, $\frac{\text{জলভাগ}}{\text{স্থলভাগ}}=\frac{3}{1}$ বা, $\frac{\text{স্থলভাগ}}{\text{জলভাগ}}=\frac{1}{3}$; এবং

3নং চিত্রে, $\frac{\text{পিতার বয়স}}{\text{পুত্রের বয়স}}=\frac{5}{2}$ বা, $\frac{\text{পুত্রের বয়স}}{\text{পিতার বয়স}}=\frac{2}{5}$.

এইরূপে একজাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে তুলনা করিয়া প্রথম রাশি দ্বিতীয় রাশির কতগুণ বা কত অংশ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহাকে প্রথম রাশির সহিত দ্বিতীয় রাশির **অনুপাত** বলে। একই জাতীয় দুইটি রাশির ভাগফল শুদ্ধ সংখ্যা বলিয়া **অনুপাতের মান একটি সংখ্যা মাত্র, উহার কোন একক নাই।**

যে দুইটি রাশির মধ্যে অনুপাত নির্ণয় করা হয় তাহাদের প্রথমটিকে **পূর্ব রাশি** (Antecedent) ও দ্বিতীয়টিকে **উত্তর রাশি** (Consequent) বলা হয়। ঐ রাশি দুইটিকে অনুপাতের দুইটি পদ (Terms) বলে।

লিখিবার ও পড়িবার নিয়ম : অনুপাত নির্ণয় করিতে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হয় বলিয়া রাশি দুইটির মধ্যে ভাগচিহ্নের (÷) সংক্ষিপ্ত আকারে ':' চিহ্ন দিতে হয়।

অঙ্কের ভাষায় CD দণ্ড ও AB দণ্ডের দৈর্ঘ্যের অনুপাতকে $1 \div 4$, বা $\frac{1}{4}$, বা $1:4$ লেখা যায়; কিন্তু সাধারণত: $1:4$ লেখা হয় এবং 1 অনুপাত 4 (1 is to 4) পড়িতে হয়। এইরূপে পৃথিবীর জলভাগ ও স্থলভাগের অনুপাত $3:1$ এবং পূর্বের দৃষ্টান্তে পিতার বয়স ও পুত্রের বয়সের অনুপাত $5:2$।

অনুপাত নির্ণয়ের সময় রাশিগুলিকে একই এককে প্রকাশ করিতে হয়। যথা,—3 টাকা ও 1 টাকা 50 পয়সার অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে 3 টাকাকে 300 পয়সা এবং 1 টাকা 50 পয়সাকে 150 পয়সায় অথবা 3 টাকাকে 3 টাকা এবং 1 টাকা 50 পয়সাকে $\frac{3}{2}$ টাকায় প্রকাশ করিয়া অনুপাত নির্ণয় করিতে হয়।

$\therefore$ 3 টাকা : 1 টাকা 50 পয়সা = 300 পয়সা : 150 পয়সা

(বা 3 টাকা : $\frac{3}{2}$ টাকা)

$= 2:1.$

অনুরূপে, (i) 2 কি. গ্রা. : 1 টোনে $=\frac{\text{2 কি. গ্রা.}}{\text{1000 কি. গ্রা.}}=\frac{1}{500}=1:500.$

(ii) 1 বর্গ সে. মি. : 1 বর্গ মি. $= \frac{1 \text{ বর্গ সে. মি.}}{10000 \text{ বর্গ সে. মি.}}$

$= \frac{1}{10000} = 1 : 10000.$

যদি কোন অনুপাতের উভয় রাশিকে 0 ভিন্ন অন্য কোন একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করা যায়, তবে ঐ অনুপাতের কোন পরিবর্তন হয় না।

যথা, (i) $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$, কারণ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

(ii) $\frac{12}{16} = \frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$, এখানে $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, সেজন্য উভয়স্থলে প্রদত্ত অনুপাতের কোন পরিবর্তন হয় নাই।

ব্যস্ত অনুপাত : দুইটি অনুপাতের মধ্যে যদি একটির পূর্বরাশি ও উত্তররাশি যথাক্রমে অন্যটির উত্তররাশি ও পূর্বরাশি হয়, তাহা হইলে অনুপাত দুইটির যে কোনটিকে অপরটির **ব্যস্ত** বা **বিপরীত অনুপাত** (Inverse ratio) বা **অন্যোন্যক** (Reciprocal) বলা হয়। যথা—

3 : 4এর ব্যস্ত অনুপাত 4 : 3 এবং 4 : 3এর ব্যস্ত অনুপাত 3 : 4, $\frac{2}{3}$এর অন্যোন্যক $\frac{3}{2}$, 3এর অন্যোন্যক $\frac{1}{3}$ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : একটি অনুপাত ও উহার ব্যস্ত অনুপাতের গুণফল সর্বদা 1 হয়।

অনুপাত দুই প্রকার—**সরল অনুপাত** ও **মিশ্র অনুপাত**। সমজাতীয় দুইটি রাশির অনুপাতকে **সরল অনুপাত** (Simple ratio) বলে। যথা—4 টাকা : 5 টাকা। দুই বা ততোধিক সরল অনুপাতের পূর্বরাশিগুলির গুণফলকে পূর্বরাশি ধরিয়া এবং উত্তররাশিগুলির গুণফলকে উত্তররাশি ধরিয়া যে অনুপাত গঠিত হয় তাহাকে ঐ সরল অনুপাতগুলির **মিশ্র** বা **যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যথা—4 : 5, 6 : 7, 5 : 6 এই অনুপাত তিনটির যৌগিক অনুপাত হইবে $(4 \times 6 \times 5) : (5 \times 7 \times 6)$ বা 4 : 7.

সরল অনুপাত তিন প্রকার—**গুরু অনুপাত**, **সাম্যানুপাত** এবং **লঘু অনুপাত**।

যে অনুপাতের পূর্বরাশি উত্তররাশি অপেক্ষা বৃহত্তর তাহাকে **গুরু অনুপাত** বলে। যথা, 20 : 13.

যে অনুপাতের পূর্বরাশি ও উত্তররাশি পরস্পর সমান তাহাকে **সাম্যানুপাত** বলে। যথা, 3 : 3.

যে অনুপাতের পূর্বরাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **লঘু অনুপাত** বলে। যথা, 5 সে. মি. : 18 সে. মি.।

§ 1.2. **অনুপাত সম্বন্ধে জ্ঞাতব্য বিষয় :–**

(i) দুইটি রাশির অনুপাত $=\frac{\text{পূর্বরাশি}}{\text{উত্তররাশি}}$

(ii) পূর্বরাশি ও উত্তররাশি সমজাতীয় হয় এবং অনুপাতের মান নির্ণয়ের সময় উহাদিগকে একই এককে প্রকাশ করিতে হয়।

(iii) অনুপাতের মান একটি শুদ্ধ সংখ্যা মাত্র, উহার কোন একক নাই।

(iv) অনুপাতকে ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা যায় বলিয়া উহার পূর্বরাশি ও উত্তররাশিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

(v) অনুপাতের মান যদি 1 না হয়, তবে পূর্বরাশি ও উত্তররাশির সহিত একই সংখ্যা যোগ করিলে বা উভয়রাশি হইতে একই সংখ্যা বিয়োগ করিলে অনুপাতের মান পরিবর্তিত হয়।

(*a*) গুরু অনুপাতের পূর্ব ও উত্তররাশির সহিত একই সংখ্যা যোগ করিলে অনুপাতের মান কমিয়া যায় এবং উভয়রাশি হইতে একই সংখ্যা বিয়োগ করিলে অনুপাতের মান বাড়িয়া যায়। যথা,—

(1) $7:5=\frac{7}{5}$; $\frac{7+2}{5+2}=\frac{9}{7}$; $\frac{7}{5}>\frac{9}{7}$ $(\because\ \frac{7}{5}-\frac{9}{7}=\frac{49-45}{35}=\frac{4}{35})$

(2) $7:5=\frac{7}{5}$; $\frac{7-2}{5-2}=\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}<\frac{5}{3}$ $(\because\ \frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25-21}{15}=\frac{4}{15})$

(*b*) লঘু অনুপাতের পূর্ব ও উত্তররাশির সহিত একই সংখ্যা যোগ করিলে অনুপাতের মান বাড়িয়া যায় এবং উভয় রাশি হইতে একই সংখ্যা বিয়োগ করিলে অনুপাতের মান কমিয়া যায়। যথা,—

(1) $5:7=\frac{5}{7}$; $\frac{5+2}{7+2}=\frac{7}{9}$; $\frac{5}{7}<\frac{7}{9}$.

(2) $5:7=\frac{5}{7}$; $\frac{5-2}{7-2}=\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}>\frac{3}{5}$.

(vi) অনুপাতকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় বলিয়া—

(*a*) লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা, (*b*) সমান হর-বিশিষ্ট করা ইত্যাদি ভগ্নাংশের প্রক্রিয়াগুলি অনুপাতের ক্ষেত্রেও প্রযুক্ত হয়।

উদাহরণ 1. 3 টা. 50 পয়সা এবং 4 টা. 20 পয়সার অনুপাত কত?

3 টা. 50 প. = 350 পয়সা, 4 টা. 20 প. = 420 পয়সা।

3 টা. 50 প. : 4 টা. 20 প. = 350 প. : 420 প. $=\frac{350}{420}=\frac{5}{6}=5:6$.

উদাহরণ 2. 2 কুইণ্টালের $1\frac{1}{10}$: 3 কুইণ্টাল 75 কিলোগ্রামের $1\frac{7}{25}$ এই অনুপাতটিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

2 কুইণ্টালের $1\frac{1}{10}$ = 200 কিলোগ্রামের $\frac{11}{10}$ = 220 কিলোগ্রাম।

3 কুইণ্টাল 75 কি. গ্রামের $1\frac{7}{25}$ = 375 কি. গ্রামের $\frac{32}{25}$ = 480 কি. গ্রা.।

$\therefore$ প্রদত্ত অনুপাতটি $=\frac{220 \text{ কি. গ্রা.}}{480 \text{ কি. গ্রা.}}=\frac{11}{24}=11:24$.

উদাহরণ 3. 5 : 7, 14 : 15 ও 9 : 20, এইগুলির যৌগিক অনুপাত কত ?

নির্ণেয় যৌগিক অনুপাত $=\frac{5\times14\times9}{7\times15\times20}=\frac{3}{10}=3:10.$

উদাহরণ 4. 4 : 7 ও 10 : 11 অনুপাত দুইটির মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর ?

এখানে 7 ও 11 এই উত্তর রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু. $=77.$

এক্ষণে, $4:7=\frac{4}{7}=\frac{4\times11}{7\times11}=\frac{44}{77}$ এবং $10:11=\frac{10}{11}=\frac{10\times7}{11\times7}=\frac{70}{77}$;

$\therefore \frac{70}{77}>\frac{44}{77}$, $\therefore$ 10 : 11 অনুপাতটি বৃহত্তর।

উদাহরণ 5. দুইটি রাশির অনুপাত 4 : 5, উহার উত্তররাশি 65 মিটার হইলে পূর্বরাশি কত ?

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{\text{পূর্বরাশি}}{\text{উত্তররাশি}}=\frac{4}{5}$;

এখানে উত্তররাশি 65 মিটার, $\therefore \frac{\text{পূর্বরাশি}}{\text{উত্তররাশি}}=\frac{\text{পূর্বরাশি}}{65\text{ মিটার}}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় পূর্বরাশি $=\frac{65\text{ মিটার}\times4}{5}=52$ মিটার।

[**দ্রষ্টব্য : পাটীগণিতের অঙ্ককে বীজগণিতের সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায়।** এজন্য প্রশ্নে যেটি নির্ণেয় বা অজ্ঞাত রাশি তাহাকে বীজগণিতের রাশি x ধরিয়া প্রশ্নের শর্ত অনুযায়ী x-এর সহিত সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে হয়। প্রশ্নানুসারে একের অধিক অজ্ঞাত রাশি নির্ণয়ের জন্য তাহাদের স্থলে x, y, z প্রভৃতি ধরিতে হয়। নিম্নে কয়েকটি প্রশ্নের সমাধান পাটীগণিত ও বীজগণিত উভয় নিয়মেই উদাহরণস্বরূপ দেখান হইল।]

বীজগণিতের নিয়মে : [উদাহরণ 5 দেখ]

মনে কর, পূর্বরাশি $=x$. $\therefore \frac{x}{65\text{ মি.}}=\frac{4}{5}$, $\therefore 5x=65$ মি. $\times 4$;

$\therefore x=\frac{65\times4}{5}$ মি. $=13$ মি. $\times4=52$ মি.

$\therefore$ নির্ণেয় পূর্বরাশি $=52$ মিটার।

উদাহরণ 6. $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}$কে পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ কর।

অনুপাতের রাশিদ্বয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলেও অনুপাতের পরিবর্তন হয় না। সুতরাং এখানে 5 ও 7এর ল. সা. গু. দ্বারা উভয় পদকে গুণ করিতে হইবে। $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\times35:\frac{4}{7}\times35=21:20.$

উদাহরণ 7. রাম 7 দিনে 80 টাকা এবং হরি 12 দিনে 90 টাকা বেতন পায়। উহাদের বেতনের অনুপাত নির্ণয় কর।

রামের 7 দিনের বেতন 80 টাকা,

$\therefore$ „ 1 „ „ $\frac{80}{7}$ টাকা,

আবার, হরির 12 দিনের বেতন 90 টাকা ;

$\therefore$ „ 1 „ „ $\frac{90}{12}$ বা $\frac{15}{2}$ টাকা ;

$\therefore$ উভয়ের বেতনের অনুপাত $= \frac{80}{7} : \frac{15}{2} = \frac{80}{7} \div \frac{15}{2} = \frac{80}{7} \times \frac{2}{15}$

$= \frac{32}{21} = 32 : 21.$

বীজগণিতের নিয়মে : রামের দৈনিক বেতন x টাকা এবং হরির দৈনিক বেতন y টাকা ধর। সুতরাং রাম ও হরির বেতনের অনুপাত হইল $x : y$.

প্রশ্নের শর্তানুসারে $7x = 80$, $\therefore$ $x = \frac{80}{7}$;

এবং $12y = 90$, $\therefore$ $y = \frac{90}{12}$ বা $\frac{15}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= x : y = \frac{x}{y} = \frac{\frac{80}{7}}{\frac{15}{2}} = \frac{80 \times 2}{7 \times 15} = \frac{32}{21} = 32 : 21$

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নের তালিকায় কোন কাপড়ের কতকগুলি দৈর্ঘ্য এবং একটি দৈর্ঘ্যের কাপড়ের মূল্য দেওয়া হইল। আনুপাতিক হারে অন্য দৈর্ঘ্যের মূল্যগুলি তালিকায় বসাও :

দৈর্ঘ্য (মিটার)	3	4	15	18	20
মূল্য (টাকায়)			60		

2. $28 : x = 200$, x-এর মান কত ?

নিম্নের অনুপাতগুলিকে মানের ক্রম অনুসারে লিখ :—

3. 6 : 14, 5 : 25, 8 : 12 **4.** $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$, 3 : 5, $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$

5. 3·2 : 4·8, $\dot{8} : \dot{5}$, $\cdot 1\dot{5} : \cdot\dot{8}\dot{5}$

6. 6 টাকা : 10 টাকা, 12 গ্রাম : 18 গ্রাম ;

1 মি. 53 সে. মি. : 2 মি. 7 সে. মি.।

7. দুইটি রাশির অনুপাত 3 : 4, পূর্বরাশি 15 হইলে উত্তররাশিটি কত ?

8. কোন অনুপাতের মান 20 এবং উত্তররাশি 2·5 ; পূর্বরাশিটি কত ?

9. দুইটি রাশির অনুপাত 4 : 5 ; উহার পূর্বরাশি 3 টাকা 76 পয়সা হইলে, উত্তররাশিটি নির্ণয় কর।

10. কোন অনুপাতের মান $\frac{5}{7}$; উহার উত্তররাশি 1 মি. 4 ডেসি মি. হইলে, পূর্বরাশিটি কত হইবে ?

11. A-এর টাকা : B-এর টাকা = 10 : 11 ; A-এর 120 টাকা হইলে B-এর টাকা কত ?

12. রামের বয়স : হরির বয়স = 3 : 4, হরির বয়স 28 বৎসর হইলে রামের বয়স কত ?

13. $\frac{3}{4}$: $\frac{5}{6}$কে পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ কর।

14. 324 টাকাকে 11 : 7 অনুপাতে A ও B-এর মধ্যে ভাগ করিয়া দিলে কে কত পাইবে ?

15. A 12 দিনে 150 কিলোমিটার এবং B 9 দিনে 87 কি. মি. চলে। উভয়ের গতির অনুপাত নির্ণয় কর।

16. একটি কুকুর একটি শশককে ধরিবার জন্য ছুটিল। কুকুরটি যতক্ষণে 5 বার লাফায়, শশকটি ততক্ষণে 6 বার লাফায় ; কিন্তু কুকুরের 3 লাফ শশকের 5 লাফের সমান। উভয়ের গতির অনুপাত কত ?

17. কোন ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2 : 7 : 11 ; ঐ কোণ তিনটির পরিমাণ কত ?

18. 65 : 15 এবং 88 : 11 এই দুইটির ব্যস্ত অনুপাত কি হইবে ?

19. দুইটি শহরের মধ্যে দূরত্ব 550 কিলোমিটারকে ম্যাপে 11 সে. মি. দীর্ঘ রেখাংশ দ্বারা দেখান হইয়াছে। ঐ ম্যাপের সাংখ্য স্কেল কত ?

20. দুইটি ট্রেনের গতিবেগের অনুপাত 7 : 8 ; দ্বিতীয় ট্রেনটি 5 ঘণ্টায় 400 কিলোমিটার গেলে প্রথমটি ঘণ্টায় কত কিলোমিটার যায় ?

21. কলিকাতা ও দিল্লীর গড় তাপমাত্রার অনুপাত 11 : 12 এবং কলিকাতা ও বোম্বাই-এর গড় তাপমাত্রার অনুপাত 9 : 8 হইলে দিল্লী ও বোম্বাই-এর গড় তাপমাত্রার অনুপাত নির্ণয় কর।

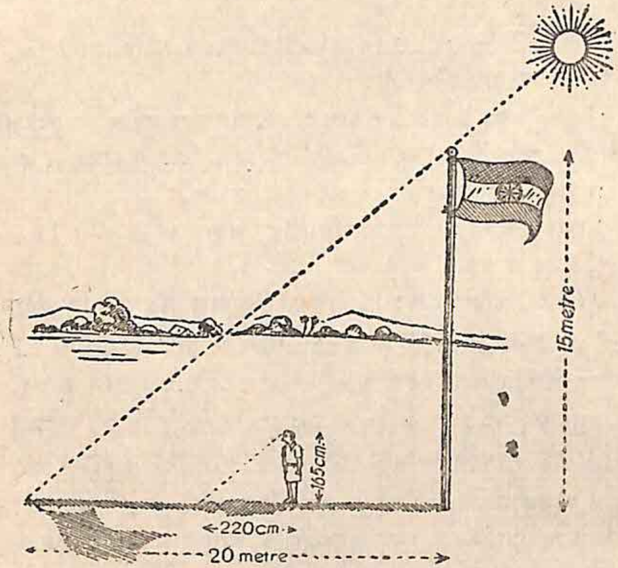
22. যে পাত্রে 100 গ্রাম নদীর জল ধরে সে পাত্রে সমুদ্রের জল ধরে 109 গ্রাম। যে পাত্রে 1 কি. গ্রা. সমুদ্রের জল ধরে তাহাতে কি পরিমাণ নদীর জল ধরিবে ?

23. একটি গাভীর দেহধারণের জন্য প্রয়োজন হয় দৈনিক 2 কি. গ্রা. সুষম খাদ্য এবং প্রতি লিটার দুধ দিবার জন্য আরও $\frac{1}{2}$ কি. গ্রা. সুষম খাদ্যের প্রয়োজন হয়। যদি কোন গাভী দৈনিক $2\frac{1}{2}$ লিটার দুধ দেয় এবং 1 লিটার দুধের মূল্য 1 টাকা 80 পয়সা ও 1 কি. গ্রা. সুষম খাদ্যের মূল্য 1 টাকা 5 পয়সা হয়, তাহা হইলে ঐ গাভীর খাদ্যের মূল্য ও উহা হইতে প্রাপ্ত দুধের মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

24. ধান ও ধান হইতে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 হইলে এবং গম ও গম হইতে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4 : 3 হইলে, 1 কুইন্টাল ধান হইতে উৎপন্ন চাল ও 1 কুইন্টাল গম হইতে উৎপন্ন সুজির অনুপাত নির্ণয় কর।

25. বাতাসে 4 ভাগ নাইট্রোজেন ও 1 ভাগ অক্সিজেন আছে। সম-পরিমাণ নাইট্রোজেন ও অক্সিজেনের ওজনের অনুপাত 7 : 8 হইলে বাতাসে নাইট্রোজেন ও অক্সিজেনের ওজনের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমানুপাত (Proportion)



4 নং চিত্র

§ 2.1. **সমানুপাতের সংজ্ঞা :**

উপরে 4নং চিত্রে একটি পতাকাদণ্ড, একটি মানুষ ও তাহাদের ছায়া দেখান হইয়াছে। পতাকাদণ্ডের উচ্চতা 15 মিটার, উহার ছায়ার দৈর্ঘ্য 20 মিটার; মানুষটির উচ্চতা 165 সে. মি. উহার ছায়ার দৈর্ঘ্য 220 সে. মি.।

সুতরাং, এখানে পতাকাদণ্ডের উচ্চতা ও ছায়ার দৈর্ঘ্যের অনুপাত 15 মিটার : 20 মিটার বা 3 : 4 ; এবং মানুষটির উচ্চতা ও তাহার ছায়ার দৈর্ঘ্যের অনুপাত 165 সে. মি. : 220 সে. মি. বা 3 : 4।

∴ পতাকাদণ্ডের উচ্চতা : পতাকাদণ্ডের ছায়ার দৈর্ঘ্য = মানুষটির উচ্চতা : মানুষটির ছায়ার দৈর্ঘ্য।

এইরূপে দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে তাহাদের একটিকে অপরটির **সমানুপাত** (Proportion) বলে।

চারিটি রাশির মধ্যে যদি প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে। যথা—

(1) 4 : 6, 10 : 15 ইহারা সমানুপাত। কারণ, $4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; এবং $10 : 15 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, উভয় অনুপাতের মান $\frac{2}{3}$ বলিয়া উহারা সমানুপাত।

(2) 2 টাকা, 5 টাকা, 12 মিটার, 30 মিটার—এই চারিটি রাশি সমানুপাতী। কারণ, 2 টাকা : 5 টাকা $= \frac{2}{5}$, এবং 12 মি. : 30 মি. $= \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$; এখানে প্রথম রাশি দুইটির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশি দুইটির অনুপাতের সমান হওয়ায়, ঐ রাশি চারিটি সমানুপাতী।

লিখিবার প্রণালী ঃ 4 : 6 = 10 : 15 ; "=" এই সমান চিহ্নটির পরিবর্তে ': :' এই চিহ্নটিও ব্যবহার করা হয়। যথা, 4 : 6 : : 10 : 15.

2 মিটার, 3 মিটার এবং 4 গ্রাম, 6 গ্রাম সমানুপাতী।

ইহাদিগকে 2 মি. : 3 মি. : : 4 গ্রা. : 6 গ্রা. লেখা হয়।

পড়িবার রীতি ঃ ঐ অনুপাত পড়িবার সময় '2 মিটার অনুপাত 3 মিটার সমান 4 গ্রাম অনুপাত 6 গ্রাম' পড়া হয়।

প্রত্যেক অনুপাতের দুইটি পদ এক জাতীয় হওয়া আবশ্যক ; কিন্তু সমানুপাতের অন্তর্গত একটি অনুপাতের রাশিদ্বয় একজাতীয় এবং অন্য অনুপাতটির রাশিদ্বয় অন্য এক জাতীয় হইতে পারে, কারণ দুইটি অনুপাতই শুদ্ধ সংখ্যা মাত্র। উপরের উদাহরণ দেখ।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **অন্ত্য** বা **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes), দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্য রাশি** বা **মধ্যক** (means) বলে এবং চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিন রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে। যথা, 2 : 3 : : 4 : 6-এর 2 ও 6 অন্ত্যরাশি, 3 ও 4 মধ্যক এবং 6 চতুর্থ সমানুপাতী।

§ 2·2. **ব্যস্ত সমানুপাত** (Reciprocal Proportion) ঃ

একটি অনুপাত অপর একটি অনুপাতের অন্যোন্যক হইলে একটিকে অপরটির **ব্যস্ত সমানুপাত** বলে। যথা—

একটি স্কুলের 1000 জন ছাত্র স্কুলের গাড়িতে যাতায়াত করে। যেদিন 25টি গাড়ি বাহির হয় সেদিন প্রত্যেক গাড়িতে গড়ে 40 জন ছাত্র যাতায়াত করে ; এবং যেদিন 20টি গাড়ি বাহির হয় সেদিন প্রত্যেক গাড়িতে গড়ে 50 জন ছাত্র যাতায়াত করে। এখানে প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গাড়ির সংখ্যার

অনুপাত 25 : 20, বা $\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$; এবং প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গড় যাত্রী-সংখ্যার অনুপাত 40 : 50, বা $\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$ ।

সুতরাং অনুপাত দুইটির একটি অপরটির অন্যোন্যক বলিয়া উহারা পরস্পর ব্যস্ত সমানুপাতী।

§ **2.3. ক্রমিক সমানুপাতী :** সমজাতীয় তিনটি রাশির মধ্যে যদি প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে। উহাদের দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশিদ্বয়ের **মধ্য সমানুপাতী** (Mean proportional) বলে, এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলা হয়।

যথা—2, 4, 8 ক্রমিক সমানুপাতী ; কারণ, 2 : 4 : : 4 : 8, এখানে 4কে 2 ও 8-এর সমানুপাতী এবং 8কে 2 ও 4-এর তৃতীয় সমানুপাতী বলে।

ক্রমিক সমানুপাত তিনটির অধিক সমজাতীয় রাশির মধ্যেও হইতে পারে। যদি পাঁচটি রাশি 1ম : 2য় = 2য় : 3য় = 3য় : 4র্থ = 4র্থ : 5ম হয়, তবে ঐ রাশি পাঁচটিকে ক্রমিক সমানুপাতী বলে। যথা—

1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 বলিয়া 1, 2, 4, 8, 16 ক্রমিক সমানুপাতী।

§ **2.4. ধারাবাহিক অনুপাত :** একজাতীয় বহু রাশির পরস্পর অনুপাতকে ধারাবাহিক ভাবে অনুপাত চিহ্ন দ্বারা সাজাইয়া লেখা যায়।

যথা—2 গ্রা. : 4 গ্রা. : 10 গ্রা. : 12 গ্রা. : 14 গ্রাম = 2 : 4 : 10 : 12 : 14 = 1 : 2 : 5 : 6 : 7.

§ **2.5. সমানুপাত সম্বন্ধীয় কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় :**

(1) চারিটি শুদ্ধ সংখ্যা সমানুপাতী হইলে, অন্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল মধ্য রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান হইবে, (অর্থাৎ 1ম × 4র্থ = 2য় × 3য়)।

3 : 5 : : 12 : 20 বলিয়া $3\times20=5\times12$.

প্রমাণ : এখানে $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$, উভয় অনুপাতকে 5×20 (অর্থাৎ উত্তর রাশিদ্বয়ের গুণফল) দ্বারা গুণ করিয়া পাই—

$$\frac{3}{\cancel{5}}\times\cancel{5}\times20=\frac{12}{\cancel{20}}\times5\times\cancel{20},\ 3\times20=12\times5.$$

এইরূপ কোণাকোণি গুণকে আড়গুণন বা বজ্রগুণন (Cross Multiplication) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত : (i) চারিটি সংখ্যা সমানুপাতী কিনা পরীক্ষা করিতে হইলে প্রথম ও চতুর্থ সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল সমান কিনা দেখিবে। সমান হইলে সংখ্যা চারিটি সমানুপাতী হইবে, নতুবা হইবে না।

(ii) কোন সমানুপাতের যে কোন তিনটি রাশি জানা থাকিলে এই নিয়মে অপর রাশিটি পাওয়া যায়। যথা—

একটি প্রান্ত্যরাশি (1ম বা 4র্থ) = মধ্য রাশিদ্বয়ের গুণফল ÷ অপর প্রান্ত্যরাশি।

একটি মধ্যরাশি (2য় বা 3য়) = প্রান্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল ÷ অপর মধ্যরাশি।

(2) তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল দ্বিতীয়ের বর্গের সমান হইবে। ইহা পূর্বের সিদ্ধান্ত হইতে প্রমাণিত হয়।

∵ প্রথম : দ্বিতীয় : : দ্বিতীয় : তৃতীয়,

∴ প্রথম × তৃতীয় = দ্বিতীয় × দ্বিতীয় = (দ্বিতীয় $)^2$,

যথা, 4, 12, 36 ক্রমিক সমানুপাতী, এখানে $4 \times 36 = (12)^2$.

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি রাশির মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের গুণফলের বর্গমূল বাহির করিতে হইবে। উহাই নির্ণেয় মধ্য সমানুপাতী। যথা, 9 ও 16-এর মধ্যসমানুপাতী $= \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$.

(3) চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে—

(i) প্রথম রাশি : দ্বিতীয় রাশি : : তৃতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি।

(ii) দ্বিতীয় রাশি : প্রথম রাশি : : চতুর্থ রাশি : তৃতীয় রাশি। কারণ, দুইটি সমান অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাতগুলিও সমান হয়। যথা—

4 : 7 : : 12 : 21 হওয়ায় 7 : 4 : : 21 : 12 হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{4}{7} = \frac{12}{21}, \therefore 1 \div \frac{4}{7} = 1 \div \frac{12}{21}$ অর্থাৎ $\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$.

বা 7 : 4 : : 21 : 12.

(4) চারিটি শুদ্ধ সংখ্যা বা এক জাতীয় রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম : তৃতীয় : : দ্বিতীয় : চতুর্থ হইতে পারে।

যথা—2 : 3 : : 8 : 12 বলিয়া 2 : 8 : : 3 : 12 হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \therefore \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{8}{12} \times \frac{3}{8}$ (উভয় পক্ষকে $\frac{3}{8}$ দ্বারা গুণ করিয়া) বা $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, ∴ 2 : 8 : : 3 : 12.

(5) কোন অনুপাতের রাশিদ্বয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে, অনুপাতের মানের পরিবর্তন হয় না। যথা—

(i) $3 : 4 = 3 \times 5 : 4 \times 5 = 15 : 20$, কারণ $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

(ii) $4:10=\frac{4\div2}{10\div2}=\frac{2}{5}=2:5.$

(iii) $2:3=4:6$ বলিয়া $2\times5:3\times5::4\times3:6\times3$ হইতে পারে। কারণ $\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{2}{3}$ এবং $\frac{4\times3}{6\times3}=\frac{2}{3}$.

যেহেতু পাটীগণিতের বিভিন্ন প্রশ্নাবলী বীজগণিতের সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায় সেজন্য বীজগণিতে প্রযুক্ত সমানুপাত সম্বন্ধীয় কয়েকটি সিদ্ধান্ত নিম্নে দেওয়া হইল :—

(i) যদি $a:b::c:d$ হয়, তাহা হইলে $a:c=b:d$ (একান্তর প্রক্রিয়া)

(ii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ হইবে (বিপরীত প্রক্রিয়া)

(iii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ হইবে (যোগ প্রক্রিয়া)

(iv) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ হইবে (ভাগ প্রক্রিয়া)

(v) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ হইবে (যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া)

(vi) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে প্রত্যেকটি $=\frac{a+c}{b+d}$ (সংযোজন প্রক্রিয়া)

(vii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ হয়, তবে প্রত্যেকটি $=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$.

(viii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে প্রত্যেকটি $=\frac{a-c}{b-d}$.

এইবার নিম্নের সমাধানগুলি লক্ষ্য কর :—

উদাহরণ 1. নিম্নের সমানুপাতগুলি সিদ্ধ কিনা নির্ণয় কর :

(i) $4:14=14:49$, (ii) $24:3=36:4$.

(i) এখানে দেখা যায় প্রান্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল $=4\times49=196$

এবং মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফল $=14\times14=196$.

অতএব, বলা যায় প্রদত্ত সমানুপাতটি সিদ্ধ (correct).

(ii) এখানে, $24\times4=96$, এবং $3\times36=108$.

এই গুণফল দুইটি সমান নহে।

$\therefore$ প্রদত্ত সমানুপাতটি সিদ্ধ নহে (incorrect).

উদাহরণ 2. 5, 15 ও 8 ইহাদের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, চতুর্থ সমানুপাতী x.

এখানে, $\frac{5}{15}=\frac{8}{x}$. $\therefore\ 5\times x=15\times8$. $\therefore\ x=\frac{15\times8}{5}=24$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা বা চতুর্থ সমানুপাতী $=24$.

উদাহরণ 3. A-এর টাকা B-এর টাকার $\frac{3}{4}$ এবং B-এর টাকা C-এর টাকার $1\frac{1}{5}$ গুণ। A ও C-এর টাকার অনুপাত কত ?

∵ A-এর টাকা = B-এর টাকার $\frac{3}{4}$, ∴ $\frac{\text{A-এর টাকা}}{\text{B-এর টাকা}}=\frac{3}{4}$.

∵ B-এর টাকা = C-এর টাকার $1\frac{1}{5}$, ∴ $\frac{\text{B-এর টাকা}}{\text{C-এর টাকা}}=\frac{6}{5}$;

∴ $\frac{\text{A-এর টাকা}}{\text{B-এর টাকা}}\times\frac{\text{B-এর টাকা}}{\text{C-এর টাকা}}=\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{9}{10}$, ∴ $\frac{\text{A-এর টাকা}}{\text{C-এর টাকা}}=\frac{9}{10}$,

∴ A-এর টাকা : C-এর টাকা = 9 : 10.

বীজগণিতের নিয়ম :

A-এর টাকা $=x$, B-এর টাকা $=y$, C-এর টাকা $=z$ ধর,

সুতরাং প্রশ্নের শর্তানুসারে, $x=\frac{3}{4}y$ এবং $y=1\frac{1}{5}z$ বা $\frac{6}{5}z$,

$$\therefore\ x=\frac{3}{4}y=\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}z=\frac{9}{10}z,$$

∴ নির্ণেয় অনুপাত $=x:z=\frac{x}{z}=\frac{9}{10}=9:10$.

উদাহরণ 4. A ও B-এর অনুপাত 2 : 3, B ও C-এর অনুপাত 4 : 5 এবং C ও D-এর অনুপাত 6 : 7 হইলে, A, B, C ও D-এর একত্র অনুপাত নির্ণয় কর।

[এখানে] $\frac{A}{B}=\frac{2}{3}, \frac{B}{C}=\frac{4}{5}, \frac{C}{D}=\frac{6}{7}$.

একত্র সমানুপাত নির্ণয় করিতে হইলে উপরের ভগ্নাংশগুলিকে এরূপ ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হইবে, যেন প্রথমটির হর দ্বিতীয়টির লবের সমান হয় এবং দ্বিতীয়টির হর তৃতীয়টির লবের সমান হয়।

$$A:B=2:3,$$
$$B:C=4:5=1:\tfrac{5}{4}=1\times3:\tfrac{5}{4}\times3=3:\tfrac{15}{4},$$
$$C:D=6:7=1:\tfrac{7}{6}=1\times\tfrac{15}{4}:\tfrac{7}{6}\times\tfrac{15}{4}=\tfrac{15}{4}:\tfrac{35}{8},$$
$$\therefore\ A:B:C:D=2:3:\tfrac{15}{4}:\tfrac{35}{8}=16:24:30:35.$$

উদাহরণ 5. একটি স্কুলের নেতা নির্বাচনে রাম 3 : 2 ভোটে জয়লাভ করে। যদি মোট ছাত্রসংখ্যা 600 হয় এবং 100 জন ছাত্র ভোট না দিয়া থাকে, তবে রাম কত ভোট পাইয়াছে ?

এখানে 600 ছাত্রের মধ্যে মোট (600 − 100) বা 500 জন ভোট দিয়াছে। মনে কর, রাম x ভোট পাইয়াছে। অতএব তাহার প্রতিদ্বন্দ্বী পাইয়াছে $500-x$.

এখানে রামের ভোট সংখ্যা : প্রতিদ্বন্দ্বীর ভোট সংখ্যা $=3:2$,

$\therefore \quad \frac{x}{500-x}=\frac{3}{2}$, বা, $2x=1500-3x$

বা $5x=1500, \quad \therefore \quad x=300$.

অতএব, রাম মোট 300 ভোট পাইয়াছে।

উদাহরণ 6. যদি 27 জন লোক একটি কাজ 204 দিনে করে, তবে 51 জন লোকে উহা কত দিনে করিবে ?

এখানে বুঝিতে হইবে যে সমহারে কোন কাজ করিবার জন্য যে হারে লোকসংখ্যা বাড়িবে, সেই হারে সময় কম লাগিবে ; সুতরাং এক্ষেত্রে ব্যস্ত সমানুপাত প্রযোজ্য হইবে।

মনে কর, 51 জনে ঐ কাজটি x দিনে করিবে।

$\therefore$ এখানে $\frac{x}{204}=\frac{27 \text{ জন}}{51 \text{ জন}}=\frac{27}{51}=\frac{9}{17}$,

$\therefore \quad 17x=204\times 9, \quad \therefore \quad x=\frac{204\times 9}{17}=12\times 9=108.$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=108$ দিন।

পাটীগণিতের নিয়ম :

27 জন লোক কাজটি করে 204 দিনে,

$\therefore$ 1 " " " " (204×27) দিনে,

$\therefore$ 51 " " " " $(\frac{204\times 27}{51})$ বা 108 দিনে

উদাহরণ 7. কোন গ্রামে একটি ক্লাবের জন্য উদ্দিষ্ট সভ্য সংখ্যা ও সংগৃহীত সভ্য সংখ্যার অনুপাত $5:6$, এবং উদ্দিষ্ট সভ্য সংখ্যা ও গ্রামবাসী সংখ্যার অনুপাত $1:50$। যদি সংগৃহীত সভ্য সংখ্যা 708 হয়, তাহা হইলে উদ্দিষ্ট সভ্যসংখ্যা ও গ্রামবাসীর সংখ্যা কত ছিল ?

প্রশ্নের শর্তানুসারে,

উদ্দিষ্ট সংখ্যা : সংগৃহীত সভ্য সংখ্যা $=5:6$,

এবং উদ্দিষ্ট সংখ্যা : গ্রামবাসীর সংখ্যা $=1:50$,

$\because$ সংগৃহীত সভ্য সংখ্যা $=708$, $\therefore$ উদ্দিষ্ট সংখ্যা $=708\times\frac{5}{6}=590$

এবং গ্রামবাসীর সংখ্যা $=590\times\frac{50}{1}=29500$.

সমানুপাতের প্রশ্নাবলী ভেদের আকারেও প্রকাশ করা যায়। পরপৃষ্ঠায় ভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হইল।

§ 2.6. **ভেদ** (Variation) : দুইটি পরিবর্তনশীল রাশি যদি এমন সম্পর্কযুক্ত হয় যে একটির হ্রাসবৃদ্ধির হারের উপর অপরটির হ্রাসবৃদ্ধির হার নির্ভর করে, তবে রাশি দুইটির পারস্পরিক সম্পর্ককে ভেদ বলে। রাশি দুইটির হ্রাস-বৃদ্ধির হারকে **ভেদহার** (rate of variation বা constant of proportionality) বলে ; ইহা একটি ধ্রুবক (constant)। ভেদ সম্পর্কযুক্ত রাশি দুইটির মধ্যে ভেদজ্ঞাপক $\propto$ চিহ্ন বসান হয়। যথা, x ও y দুইটি রাশি ভেদ সম্পর্কযুক্ত হইলে লেখা হয় $x \propto y$ (x varies as y).

ভেদ দুই প্রকার :—**সরল ভেদ** ও **ব্যস্ত ভেদ**। একটি রাশির হ্রাসে (বা বৃদ্ধিতে) যদি অপর রাশির একই অনুপাতে হ্রাস (বা বৃদ্ধি) ঘটে, তবে রাশি দুইটি **সরল ভেদ** (direct variation) সম্পর্কযুক্ত হয় ; এবং যদি একটি রাশির হ্রাসে (বা বৃদ্ধিতে) অপর রাশির সমানুপাতী বৃদ্ধি (বা হ্রাস) ঘটে, তবে রাশি দুইটি **ব্যস্ত ভেদ** (inverse বা indirect variation) সম্পর্কযুক্ত হয়।

x ও y দুইটি পরিবর্তনশীল রাশি সরল ভেদে থাকিলে, অর্থাৎ $x \propto y$ হইলে $\frac{x}{y}=c$ (ধ্রুবক) হয়। আর x ও y রাশি দুইটি ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, অর্থাৎ $x \propto \frac{1}{y}$ হইলে $xy=c$ (ধ্রুবক) হয়।

যখন একটি পরিবর্তনশীল রাশির হ্রাস-বৃদ্ধির হার একাধিক পরিবর্তনশীল রাশির হ্রাস-বৃদ্ধির হারের উপর নির্ভর করে তখন প্রথম রাশিটি ঐ একাধিক রাশির গুণফলের সহিত **যৌগিক ভেদ** সম্পর্কযুক্ত। যথা,

$l \propto m, l \propto n, l \propto p$ হইলে $l \propto mnp$ হয়।

নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল :—

উদাহরণ 1. গোলকের ঘনফল (V) উহার ব্যাসার্ধের ঘনফলের $(r)^3$ সহিত সরল ভেদ সম্পর্কযুক্ত এবং ভেদহার $\frac{88}{21}$ হইলে, 3 সে. মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট গোলকের ঘনফল নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, $V \propto r^3$ এবং $\frac{V}{r^3}=\frac{88}{21}$

$\therefore \quad V=\frac{88}{21} r^3=\frac{88}{21}$ (3 সে. মি. $)^3=113\frac{1}{7}$ ঘন সে. মি.

$\therefore$ গোলকটির নির্ণেয় ঘনফল $113\frac{1}{7}$ ঘন সে. মি.।

উদাহরণ 2. কোন গুদামে যে পরিমাণ খাদ্যবস্তু আছে তাহাতে মাথাপিছু সপ্তাহে 1750 গ্রাম রেশন দিলে 40 সপ্তাহ চলে, যদি মাথাপিছু 2 কিলোগ্রাম রেশন দেওয়া হয় তবে কত সপ্তাহ চলিবে ?

এখানে যেহেতু মজুত খাদ্যের পরিমাণ ধ্রুবক, অতএব মাথাপিছু বরাদ্দ ও সপ্তাহসংখ্যা পরস্পর ব্যস্ত ভেদ সম্পর্কযুক্ত ; অর্থাৎ যদি মাথাপিছু বরাদ্দ p, সপ্তাহ সংখ্যা q এবং ধ্রুবক k হয়, তবে

$p \propto \frac{1}{q}$; সুতরাং $pq=k$, $\therefore$ $q=\frac{k}{p}$. $\therefore$ $k=1750\times40=70000$.

$\therefore$ মাথাপিছু বরাদ্দ (p) যখন 2 কি. গ্রা. বা 2000 গ্রাম হইবে তখন সপ্তাহ সংখ্যা হইবে $\frac{70000}{2000}$ বা 35.

$\therefore$ গুদামে মজুত খাদ্য হইতে মাথাপিছু 2 কি. গ্রা. রেশন দিলে 35 সপ্তাহ চলিবে।

উদাহরণ 3. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য (L) $\frac{1}{20}$ অংশ বাড়িলে এবং প্রস্থ (B) $\frac{1}{50}$ অংশ বাড়িলে ক্ষেত্রফল (A) কত বাড়িবে ?

এখানে, $A \propto L$, এবং $A \propto B$.

সুতরাং $A \propto L\times B$, $\therefore$ $\frac{A}{LB}=K$ (constant).

মনে কর, প্রথমে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল ছিল A_1 এবং দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বাড়িবার পর ক্ষেত্রফল হইল A_2.

$\therefore$ $A_1=LB.K$

$A_2=\frac{21}{20}L\times\frac{51}{50}$ B.K.$=\frac{1071}{1000}$ LBK

$\therefore$ LBK বর্ধিত হয় $(\frac{1071}{1000}-1)$ LBK বা $\frac{71}{1000}$ LBK পরিমাণ।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল বর্ধিত হইবে $\frac{\frac{71}{1000}LBK}{LBK}$ বা $\frac{71}{1000}$ অংশ।

প্রশ্নমালা 2

1. নিম্নের সমানুপাতগুলি সিদ্ধ কিনা নির্ণয় কর :—

(i) $4\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}=27 : 21$ (ii) $10{\cdot}2 : 0{\cdot}65=0{\cdot}17 : 0{\cdot}055$.

নিম্নের রাশিগুলির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

2. 4, 6, 8. 3. 10, 12, 25. 4. 33, 22, 18 পয়সা

5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. 6. 5, $7\frac{1}{2}$, 12. 7. ·12, ·21, 8.

8. 2 টাকা 50 পয়সা, 3 টাকা 20 পয়সা, 25 মিটার।

নিম্নের রাশি দুইটির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

9. 12, 18. 10. $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{5}$. 11. ·16, ·18.

12. 1 ঘণ্টা 20 মিনিট, 1 ঘণ্টা 40 মিনিট।

নিম্নের সমানুপাতী রাশিগুলির মধ্যে লুপ্ত রাশিগুলি নির্ণয় কর :—

13. 12, 16, *, 20. 14. 4, *, 9, $13\frac{1}{2}$. 15. 6, 14, *, 35 টা.

নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

16. 25, 81. 17. $1\frac{4}{7}, 6\frac{2}{7}$. 18. 1·4 গ্রাম, 5·6 গ্রাম।

19. 13 ও 6-এর যে অনুপাত, 39 ও কোন্ রাশির সেই অনুপাত ?

20. নিম্নের বিবৃতিগুলিতে সমানুপাত পাওয়া যায় কি ?

(i) চাকার গতিবেগ ও কোন প্রদত্ত সময়ে উহা যে দূরত্ব যায়।

(ii) বর্গক্ষেত্রের বাহু ও উহার ক্ষেত্রফল।

(iii) কোন প্রদত্ত দূরত্ব যাইতে একটি চাকা যতবার ঘোরে এবং চাকাটির ব্যাস।

21. যদি x ও y-এর মানগুলি সমানুপাতী বা ব্যস্ত সমানুপাতী হয়, তবে নিম্নে প্রদত্ত তালিকা দুইটি সম্পূর্ণ কর :—

(i)

x	3	6	12	24	48
y			8	16	

(ii)

x	3	6	12	24	48
y		16	8		

22. 3 টাকা 60 পয়সা ও 5 টাকা 40 পয়সার যে অনুপাত, 30 মিনিটের সহিত কোন্ রাশির সেই অনুপাত ?

23. 14, 16, 35, 42 কি সমানুপাতী ? যদি না হয়, তবে চতুর্থ রাশি কত হইলে উহারা সমানুপাতী হইবে ?

24. 49 ও কোন একটি রাশির যে অনুপাত, সেই রাশি ও 81-র সেই অনুপাত হইলে ঐ রাশিটি কত ?

25. কোন ঘড়ি 3 ঘণ্টায় 10 সেকেণ্ড স্লো যায়। উহা 8, 12 ও 24 ঘণ্টায় কত স্লো হইবে ?

26. 1·5 মিটার পরিধিবিশিষ্ট একটি চাকা কোন দূরত্ব যাইতে 96 বার ঘোরে। ঐ দূরত্ব যাইতে 2·4 মিটার পরিধিবিশিষ্ট চাকা কত বার ঘুরিবে ?

27. কোন কারখানায় যে কয়লা আছে তাহাতে প্রতিদিন 3·6 টোনে কয়লা লাগিলে 45 দিন চলে। প্রতিদিন 2·4 টোনে কয়লা খরচ করিলে ঐ কয়লায় কত দিন চলিবে ?

28. রাম ও হরির বয়সের অনুপাত 3 : 4, হরি ও যদুর বয়সের অনুপাত 12 : 13 ; রাম ও যদুর বয়সের অনুপাত কত ?

29. A : B = 2 : 3, B : C = 4 : 7, C : D = 5 : 6 হইলে A : D কত? A : B : C : D কত নির্ণয় কর।

30. A-এর বয়স B-এর বয়সের $\frac{3}{4}$ এবং C-এর বয়স B-এর বয়সের $1\frac{1}{2}$ গুণ। A ও C-এর বয়সের অনুপাত কত? C-এর বয়স 30 বৎসর হইলে A-এর বয়স কত?

31. বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত যদি 22 : 7 হয়, তবে বৃত্তের ব্যাস 4 মি. 2 ডেসি মি. হইলে তাহার পরিধি কত?

32. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং উহাদের ল. সা. গু. 180, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

33. রামের টাকার $\frac{2}{3}$ অংশ, হরির টাকার $\frac{1}{2}$ অংশের সমান। উহাদের মোট 1400 টাকা থাকিলে, কাহার কত টাকা আছে?

34. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 8 এবং উভয়ের অন্তর 69 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

35. A ও B-এর বর্তমান বয়সের অনুপাত 4 : 5 এবং 5 বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত 5 : 6 হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত?

36. চার বৎসর পূর্বে A ও B-এর বয়সের অনুপাত 11 : 14 ছিল এবং 4 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 13 : 16 হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত?

37. রাম ও হরির বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর। 3 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত 4 : 5 ছিল। 3 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে?

38. এক ব্যক্তি 1100 টাকায় তাহার টেলিভিশন সেট ক্রয় করিয়া 1540 টাকায় বিক্রয় করিল। যদি উহার ক্রয়মূল্য 1200 টাকা হইত, তবে কত টাকায় উহা বিক্রয় করিলে ক্রয় ও বিক্রয়মূল্যের অনুপাত একই থাকিবে?

39. কোন চৌকিদার একটি চোরকে ধরিবার জন্য ছুটিল। চৌকিদার যে সময়ে 4 বার পদক্ষেপ করে, চোরটি ততক্ষণে 5 বার পদক্ষেপ করে; কিন্তু চৌকিদার 6 বার পদক্ষেপে যতদূর যায়, চোর 8 বার পদক্ষেপে তত দূর যায়। উভয়ের গতিবেগের অনুপাত কত?

40. তাপমাত্রার (T) সহিত বায়বীয় পদার্থের আয়তনের (V) সম্পর্ক হইল $V \propto T$; যদি 50° তাপমাত্রায় কোন পদার্থের আয়তন 7 লিটার হয়, তবে 70° তাপমাত্রায় ঐ পদার্থের আয়তন কত হইবে?

41. গ্যাসের চাপের (P) সহিত উহার আয়তন (V) ব্যস্ত ভেদ সম্পর্কযুক্ত। 6 একক চাপে 3·5 লিটার গ্যাস 10 একক চাপে কত আয়তনবিশিষ্ট হইবে?

42. নিম্নের ছক্ হইতে শক্তিপ্রভব ও উৎস হইতে শক্তিপ্রভব স্থানের দূরত্বের ভেদ সম্পর্ক নির্ণয় কর।

শক্তি উৎস জনিত শক্তিপ্রভব (1)	উৎস হইতে শক্তিপ্রভব স্থানের দূরত্ব (*d*)
144 একক	1 একক
36 "	2 "
16 "	3 "
9 "	4 "

43. কোন আলোক-উৎস হইতে প্রাপ্ত আলোক-পরিমাণ মধ্যস্থ দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। কোন ল্যাম্প হইতে একটি পুস্তক 9 ডেসিমিটার দূরে আছে। উহাকে আর কতটা সরাইলে পূর্ব পরিমাণের $\frac{1}{3}$ অংশ আলোক পাওয়া যাইবে?

§ 2.7. ত্রৈরাশিক ও বহুরাশিক :

সমানুপাতী চারিটি রাশির মধ্যে প্রথম তিনটি রাশি দেওয়া থাকিলে চতুর্থ রাশি নির্ণয়ের প্রণালীকে **ত্রৈরাশিক** (Rule of Three) বলে। ইহা চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয়ের অনুরূপ।

বহুরাশিক ত্রৈরাশিকের অনুরূপ। বহুরাশিকে অনুপাতের 5টি, 7টি, 9টি বা ততোধিক অযুগ্ম সংখ্যক রাশি প্রদত্ত থাকে এবং তাহাদের সাহায্যে অপর একটি রাশি (ষষ্ঠ, অষ্টম প্রভৃতি) নির্ণয় করা হয়। এই নির্ণয় প্রণালীকে **বহুরাশিক** (Multiple Rule of Three) বলে। ঐকিক নিয়মের প্রশ্নগুলি ত্রৈরাশিক ও বহুরাশিকের সাহায্যেও করা যায়।

ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে প্রশ্ন সমাধানের সময়—

(*a*) যে রাশিটি নির্ণয় করিতে হইবে তাহার সাংখ্যমানকে x ধরিয়া সমানুপাতের চতুর্থস্থানে বসাইতে হয় এবং উহার সমজাতীয় প্রদত্ত রাশিটিকে তৃতীয় স্থানে বসাইতে হয়।

(*b*) নির্ণেয় রাশিটি প্রদত্ত সমজাতীয় রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হইবে তাহা প্রশ্নের বিষয়বস্তু হইতে বুঝিতে হইবে।

(*c*) যদি x প্রদত্ত সমজাতীয় রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে অন্য দুইটি রাশির বড়টিকে সমানুপাতের প্রথম স্থানে এবং ছোটটিকে দ্বিতীয় স্থানে বসাইতে হয়।

(*d*) যদি x প্রদত্ত সমজাতীয় রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হয় তবে অন্য দুই রাশির ছোটটিকে সমানুপাতের প্রথম স্থানে এবং বড়টিকে সমানুপাতের দ্বিতীয় স্থানে বসাইতে হয়।

ত্রৈরাশিকে ও বহুরাশিকে রাশি স্থাপন প্রণালী নিম্নে দেখ :—

উদাহরণ 1. 10 জন লোকে 18 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। 12 জন লোকে উহা কত দিনে করিবে?

$12 : 10 :: 18 : x$ (দিন)

$\therefore \quad x = \frac{10 \times 18}{12}$ দিন $=15$ দিন। $\therefore$ নির্ণেয় সময় $=15$ দিন।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে নির্ণেয় রাশি x (দিন)-কে চতুর্থ স্থানে এবং উহার সমশ্রেণীর রাশি 18 দিনকে তৃতীয় স্থানে বসান হইল। এইবার মনে মনে প্রশ্ন করা হইল 10 জনে কাজটি যদি 18 দিনে করে, তবে 12 জনে কম দিনে অথবা বেশি দিনে করিবে। বুঝা গেল কম দিনে করিবে (কারণ, লোক বেশী থাকিলে কাজ কম দিনে হয়)। সেইজন্য 10 ও 12-এর মধ্যে কমটিকে অর্থাৎ 10কে দ্বিতীয় স্থানে এবং 12কে প্রথম স্থানে বসান হইল। কম উত্তর হইবে মনে হইলে কমটিকে এবং বেশী উত্তর হইবে মনে হইলে বেশীটিকে দ্বিতীয় স্থানে বসাইতে হয়।]

উদাহরণ 2. যখন গমের কুইণ্টাল 120 টাকা, তখন 25 পয়সায় 100 গ্রাম ওজনের রুটি পাওয়া যায়; 100 টাকা গমের কুইণ্টাল হইলে, 20 পয়সা মূল্যের রুটির ওজন কত হইবে?

গমের দাম	রুটির দাম	রুটির ওজন
120 টাকা	25 পয়সা	100 গ্রাম
100 টাকা	20 পয়সা	নির্ণেয় রাশি x (গ্রাম)

$$\left.\begin{array}{l}100 : 120 \\ 25 \;:\; 20\end{array}\right\} :: 100 : x \text{ (গ্রাম)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ওজন $(x) = \frac{120 \times 20 \times 100}{100 \times 25}$ গ্রাম $=96$ গ্রাম।

[গমের দর কমিলে বেশী ওজনের রুটি পাওয়া যায়, আর গমের দর বাড়িলে রুটির ওজন কম পাওয়া যায়।]

প্রশ্নমালা 3

1. 7টি চারাগাছের দাম 42 টাকা, 13টি চারাগাছের দাম কত?

2. কোন কাজ 12 জন লোক 30 দিনে করিতে পারে। উহা 20 দিনে করিতে হইলে আর কতজন অতিরিক্ত লোক লাগিবে?

3. যখন 1 কিলোগ্রাম গমের মূল্য 60 পয়সা, তখন 5 পয়সা মূল্যের বিস্কুটের ওজন 10 গ্রাম। 1 কিলোগ্রাম গমের মূল্য 75 পয়সা হইলে 5 পয়সা মূল্যের বিস্কুটের ওজন কত হইবে?

4. 8 জন পুরুষ বা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 1200 টাকা উপার্জন করে। 20 জন পুরুষ ও 24 জন স্ত্রীলোক 5 দিনে কত উপার্জন করিবে?

5. কোন ঠিকাদার 350 দিনে 12 কিলোমিটার খাল কাটিয়া দিবার চুক্তি করিল। সে 45 জন লোক নিযুক্ত করিয়া 200 দিন পরে দেখিল মাত্র $4\frac{1}{2}$ কিলোমিটার খাল কাটা হইয়াছে। তখন আরও কতজন লোক নিযুক্ত করিলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হইবে?

6. কোন পোল্ট্রী-খামারে 5000টি মুরগীর 250 দিনের খাদ্য মজুত আছে। 50 দিন পরে কত মুরগী বিক্রয় করিলে অবশিষ্ট খাদ্যে আরও 250 দিন চলিবে?

7. প্রতিদিন 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 50 জনে একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে। প্রত্যহ কত ঘণ্টা খাটিয়া 60 জন লোকে 16 দিনে উহার দ্বিগুণ কাজ করিবে?

---

§ 2.8. সামানুপাতিক ভাগহার

কোন প্রদত্ত রাশিকে কতকগুলি প্রদত্ত সংখ্যার অনুপাতে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করাকে **সামানুপাতিক ভাগহার** (Division into proportional parts) বলা হয়। নিম্নে উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. 940 টাকা A, B ও C-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A-এর অংশ : B-এর অংশ = 6 : 5 এবং B-এর অংশ : C-এর অংশ = 15 : 14 হয়।

$\frac{\text{A-এর অংশ}}{\text{B-এর অংশ}} = 6 : 5 = \frac{6}{5} = \frac{6 \times 3}{5 \times 3} = 18 : 15$, এবং $\frac{\text{B-এর অংশ}}{\text{C-এর অংশ}} = 15 : 14$;

∴ A-এর অংশ : B-এর অংশ : C-এর অংশ = 18 : 15 : 14;

∴ তাহাদের মোট অংশ = 18 + 15 + 14 = 47

∴ 1 অংশ = 940 টাকা ÷ 47 = 20 টাকা

∴ A-এর অংশ = 20 টাকা × 18 = 360 টাকা
B-এর অংশ = 20 টাকা × 15 = 300 টাকা
C-এর অংশ = 20 টাকা × 14 = 280 টাকা
(উত্তর)

বীজগণিতের নিয়ম :

A-এর অংশ = x, B-এর অংশ = y এবং C-এর অংশ = z ধর।

∴ প্রশ্নের শর্তানুসারে $\frac{x}{y} = \frac{6}{5} = \frac{18}{15}$, এবং $\frac{y}{x} = \frac{15}{14}$

$\therefore \quad x : y : z = 18 : 15 : : 14$

$18+15+14=47$

$\therefore \quad x=(940\times\frac{18}{47})$ বা 360 টাকা, $y=(940\times\frac{15}{47})$ বা 300 টাকা
এবং $z=(940\times\frac{14}{47})$ বা 280 টাকা।

$\therefore$ A-এর অংশ = 360 টাকা, B-এর অংশ = 300 টাকা
এবং C-এর অংশ = 280 টাকা।

[**দ্রষ্টব্য :** দেওয়া আছে A 6 পাইলে B 5 পায় এবং B 15 পাইলে C 14 পায়। তিনজনের একত্রে অনুপাত পাইবার জন্য দুই অনুপাতে B-এর ভাগ সমান করিতে হইবে। $\therefore$ প্রথম অনুপাতে B-এর 5×3 বা 15 করা হইয়াছে, ইহাতে দুই অনুপাতে B-এর অংশ সমান হইল। এখন দেখ, প্রথম অনুপাতে B-এর অংশের 3 গুণ করা হইয়াছে বলিয়া A-এর অংশকে 3 গুণ করা হইয়াছে। এখন দেখা গেল, A 18 ভাগ পাইলে, B পাইবে 15 ভাগ এবং B 15 ভাগ পাইলে C পাইবে 14 ভাগ।

অতএব, A-এর অংশ : B-এর অংশ : C-এর অংশ = 18 : 15 : 14 হইল।]

উদাহরণ 2. 800টি আম 4 জন পুরুষ, 10 জন স্ত্রীলোক ও 16 জন বালকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$, প্রত্যেক স্ত্রীলোকের অংশের $\frac{1}{2}$ এবং প্রত্যেক বালকের অংশের $\frac{3}{4}$ সমান হয়।

1 জন স্ত্রীলোকের অংশের $\frac{1}{2}$ = 1 জন পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 1 জন স্ত্রীলোকের অংশ = 1 জন পুরুষের অংশের $\frac{2}{3}$;

আবার, 1 জন বালকের অংশের $\frac{3}{4}$ = 1 জন পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$

$\therefore$ 1 জন বালকের অংশ = 1 জন পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}$ বা $\frac{4}{9}$;

$\therefore$ 1 জন পুরুষের অংশ : 1 জন স্ত্রীলোকের অংশ : 1 জন বালকের অংশ $=1:\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=9:6:4$ [প্রত্যেক অনুপাতকে 9 গুণ করিয়া]

$\therefore$ 4 জন পুরুষের অংশ : 10 জন স্ত্রীলোকের অংশ : 16 জন বালকের অংশ = 36 : 60 : 64.

এক্ষণে, 36+60+64=160 ; 800 আম ÷ 160 = 5টি আম

অতএব, প্রত্যেক পুরুষ পাইবে 5×9 বা 45টি আম
" স্ত্রীলোক " 5×6 বা 30টি "
" বালক " 5×4 বা 20টি " } (উত্তর)

উদাহরণ 3. কতকগুলি টাকা, 50 পয়সা ও 25 পয়সা মুদ্রায় মিলিয়া মোট 93 টাকা 75 পয়সা হইল। ঐ মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 : 5 হইলে কোন মুদ্রা কয়টি আছে ?

টাকার সংখ্যা : 50 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা : 25 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=3:4:5$;

$\therefore$ টাকাগুলির মূল্য : 50 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য : 25 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য

$=$3টি টাকা : 4টি 50 পয়সা : 5টি 25 পয়সা

$=300$ প. : 200 প. : 125 প. $=300:200:125=12:8:5$.

এক্ষণে, $12+8+5=25$, এবং 93 টাকা 75 পয়সা $=\frac{375}{4}$ টাকা।

$\therefore$ টাকাগুলির মূল্য $=\frac{375}{4\times 25}$ টা. $\times 12=45$ টাকা,

$\therefore$ টাকার মোট সংখ্যা $=45$.

50 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য $=\frac{375}{4\times 25}$ টা. $\times 8=30$ টাকা,

$\therefore$ 50 পয়সা মুদ্রার মোট সংখ্যা $=30\times 2=60$.

আবার 25 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য $=\frac{375}{4\times 25}$ টা. $\times 5=\frac{75}{4}$ টাকা,

$\therefore$ 25 পয়সা মুদ্রার মোট সংখ্যা $=\frac{75}{4}\times 4=75$.

উদাহরণ 4. 50 পয়সা, 25 পয়সা ও 10 পয়সা মুদ্রায় মোট 240টি মুদ্রা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত $5:3:1$ হয়, তবে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

মুদ্রাগুলির মূল্যের অনুপাত $=5:3:1=5$ টা. : 3 টা. : 1 টা.

$\therefore$ উহাদের সংখ্যার অনুপাত $=10:12:10$.

[কারণ, 5 টাকা $=$ 10টি 50 পয়সা মুদ্রা, 3 টাকা $=$ 12টি 25 পয়সা মুদ্রা, 1 টাকা $=$ 10টি 10 পয়সা মুদ্রা।]. $10+12+10=32$

$\therefore$ 50 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=240\times\frac{10}{32}=75$
25 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=240\times\frac{12}{32}=90$
10 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=240\times\frac{10}{32}=75$ } (উত্তর)।

উদাহরণ 5. একজন পুরুষ 4 দিন, একজন স্ত্রীলোক 6 দিন এবং একটি বালক 5 দিন কাজ করিয়া কোন কার্য সম্পন্ন করিল এবং তিনজনে মোট 66 টাকা মজুরী পাইল। যদি তাহাদের প্রতি দিনের কাজের অনুপাত $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}$ হয়, তবে কে কত টাকা মজুরী পাইবে ?

পুরুষের 4 দিনের কাজ : স্ত্রীলোকের 6 দিনের কাজ : বালকের 5 দিনের কাজ $=4\times\frac{1}{3}:6\times\frac{1}{4}:5\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}:\frac{6}{4}:\frac{5}{6}=16:18:10$ [হরগুলির ল. সা. গু. 12 দ্বারা গুণ করিয়া]।

এক্ষণে, $16+18+10=44$; 66 টাকা $\div 44=1$ টা. 50 পয়সা।

$\therefore$ পুরুষের মজুরী $=1$ টাকা 50 পয়সা $\times 16=24$ টাকা
স্ত্রীলোকের " $=1$ টাকা 50 পয়সা $\times 18=27$ টাকা
এবং বালকের " $=1$ টাকা 50 পয়সা $\times 10=15$ টাকা } (উত্তর)।

প্রশ্নমালা 4

1. (i) এক গোয়ালা 8 : 3 অনুপাতে দুধের সহিত জল মিশাইয়া মোট 33 কিলোলিটার মিশ্রিত দুধ বিক্রয় করিল। সে কত জল মিশাইয়াছিল ?

(ii) 3 : 4 : 5 অনুপাতে কত টাকা 3 জনকে ভাগ করিয়া দিলে তৃতীয় ব্যক্তি 10 টাকা পাইবে ?

2. 750কে এরূপ 3 অংশে বিভক্ত কর, যেন তাহাদের অনুপাত 4 : 5 : 6 হয়।

3. 340 টাকা A, B ও C-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন তাহাদের অংশগুলি 2, 5 ও $1\frac{1}{2}$এর আনুপাতিক হয়।

4. ছাদ ঢালাই-এর কাজে সিমেন্ট, বালি ও পাথরকুচির অনুপাত 11 : 42 : 21 হইলে যদি কাজটিতে 121 বস্তা সিমেন্ট লাগে তাহা হইলে কত বস্তা বালি ও কত বস্তা পাথরকুচি লাগিবে ?

5. কতকগুলি আম রাম, হরি ও যদুর মধ্যে 4 : 3 : 5 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। হরি অপেক্ষা যদু 60টি আম বেশী পাইলে মোট আমের সংখ্যা কত ?

6. 350 টাকা A, B ও C-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A ও B-এর অংশের অনুপাত 2 : 3 এবং B ও C-এর অংশের অনুপাত 4 : 5 হয়।

7. 450 টাকা A, B ও C-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A 7 টাকা পাইলে, B 5 টাকা ও C 3 টাকা পায়।

8. তিনজন লোক একত্রে ব্যবসা করিয়া 1180 টাকা লাভ করিল। যদি উহাদের মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{4}$ হয়, তবে লাভের অংশ কে কত টাকা পাইবে ?

9. ক্রিকেট খেলায় নাইডু, অমরনাথ ও হাজারী মোট 342 রান করিল। নাইডু ও অমরনাথের এবং অমরনাথ ও হাজারীর রানের অনুপাত 3 : 2 হইলে, কে কত রান করিয়াছে ?

10. তিন ব্যক্তি লটারীতে মোট 13400 টাকা পাইল। যদি প্রথম ব্যক্তির টাকার $\frac{1}{4}$, দ্বিতীয়ের টাকার $\frac{2}{3}$ এবং তৃতীয়ের টাকার $\frac{5}{6}$ অংশ সমান হয়, তবে কে কত টাকা পাইয়াছে ?

11. একটি ব্যাগে মোট 112 টাকা 50 পয়সা মূল্যের টাকা, 50 পয়সা মুদ্রা ও 25 পয়সা মুদ্রা আছে ; উহাদের সংখ্যার অনুপাত 8 : 5 : 3 হইলে, কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

12. 400 টাকা A, B ও C-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A 7 টাকা পাইলে B 8 টাকা পায় এবং B 4 টাকা পাইলে C 5 টাকা পায়।

13. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির অনুপাত 3 : 4 : 5 : 6 এবং উহার পরিসীমা 72 সেন্টিমিটার হইলে, বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

14. টাকা, 50 পয়সা ও 25 পয়সা এই তিন প্রকার মুদ্রা মিলিয়া মোট 240 টাকা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হয়, তবে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

15. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় 7, 9 ও 12-র সমানুপাতী এবং উহার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহুর অন্তর 15 সেন্টিমিটার। বৃহত্তম বাহুটির দৈর্ঘ্য কত ?

16. তিন জন লোকের বয়সের সমষ্টি 150 বৎসর। 10 বৎসর পূর্বে উহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 7 : 8 : 9 ; বর্তমানে প্রত্যেকের বয়স কত ?

17. কত টাকাকে 3·4, 5·7 ও 4·9-এর আনুপাতিক অংশে বিভক্ত করিলে ক্ষুদ্রতম অংশের পরিমাণ 170 টাকা হইবে ?

18. তিনজন বালকের মধ্যে কেবল প্রথম বালকের 4 খানি এবং দ্বিতীয় বালকের 3 খানি পাঁউরুটি ছিল। তাহারা 3 জনে সমস্ত রুটি সমান ভাগ করিয়া খাইল। তৃতীয় বালক যদি তাহার অংশের রুটির মূল্য 21 পয়সা দেয়, তবে অন্য বালক দুইটি উহা কিরূপে ভাগ করিয়া লইবে ?

19. A, B ও C-কে 870 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A-এর অংশের ·5 = B-এর অংশের ·6 = C-এর অংশের ·75 হয়। [ঢা. প্র. 1924]

20. 3 জন পুরুষ, 5 জন স্ত্রীলোক এবং 8 জন বালকের মধ্যে 500 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক পুরুষ 37·5 পয়সা পাইলে প্রত্যেক স্ত্রীলোক 25 পয়সা এবং প্রত্যেক বালক 9·375 পয়সা পায়।

21. 5 জন পুরুষ, 6 জন স্ত্রীলোক ও 7 জন বালক 5 দিনে একটি কাজ শেষ করিয়া 51 টাকা 25 পয়সা মজুরী পাইল। 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালকের দৈনিক কাজের পরিমাণ $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ অনুপাতে হইলে, প্রত্যেকে কত মজুরী পাইবে ?

22. তিন প্রকার পদার্থের আয়তনের অনুপাত 3 : 4 : 7 এবং সম-আয়তনের ঐ পদার্থত্রয়ের ওজনের অনুপাত 5 : 2 : 6. ঐ পদার্থ তিনটি মিশ্রিত করিলে 52 কিলোগ্রাম মিশ্রিত পদার্থে তৃতীয় পদার্থের ওজন কত হইবে ?

---

§ 2.9. সম্ভূয় সমুত্থান

একাধিক ব্যক্তি স্ব স্ব মূলধন দিয়া যদি এক সঙ্গে মিলিয়া কোন ব্যবসায় করে, তবে সেই ব্যবসায়কে যৌথ ব্যবসায় বলে। আর যাহাদের মূলধনে ঐ ব্যবসায় চলে, তাহাদিগের প্রত্যেককে ঐ ব্যবসায়ের **অংশীদার** (Fellow বা Partner) বলে। এইরূপ কোন ব্যবসায়ে যে লাভ বা ক্ষতি হয় তাহা অংশীদারদিগের মধ্যে বণ্টন করিয়া দিবার প্রণালীকে **সম্ভূয় সমুত্থান** (Partnership বা Fellowship) বলে।

সরল (Simple) ও **মিশ্র** (Compound) এই দুই প্রকারের সম্ভুয় সমুত্থান আছে।

যদি কোন যৌথ ব্যবসায়ে সকল অংশীদারের মূলধনই একই সময়ের জন্য নিয়োজিত হইয়া থাকে, তাহা হইলে স্ব স্ব নিয়োজিত মূলধনের অনুপাতে লাভ বা ক্ষতির অংশ বণ্টন করা হইয়া থাকে। এইরূপ বণ্টন-প্রণালীকে **সরল সম্ভুয় সমুত্থান** বলা হয়।

যদি বিভিন্ন অংশীদারের মূলধন বিভিন্ন সময়ের জন্য কোন ব্যবসায়ে নিয়োজিত হইয়া থাকে, তাহা হইলে লাভ বা ক্ষতির অংশ বণ্টন করিবার সময় যে সময়ের জন্য এক এক জনের মূলধন খাটিয়াছে সেই সময়কেও হিসাবের মধ্যে ধরিতে হইবে। এরূপ ক্ষেত্রে প্রত্যেকের মূলধন ও সময়ের গুণফলের অনুপাতে অংশীদারগণের লাভ বা ক্ষতির অনুপাত হইবে। এইভাবে লাভ বা ক্ষতির বণ্টন প্রণালীকে **মিশ্র সম্ভুয় সমুত্থান** বলা হয়। এই বণ্টন-প্রণালী যে সামানুপাতিক ভাগহারের অনুরূপ তাহা বুঝা যাইতেছে।

উদাহরণ 1. রাম ও হরি যথাক্রমে 1200 টাকা ও 800 টাকা দিয়া একত্র ব্যবসা করিয়া এক বৎসরে 300 টাকা লাভ করিল। লাভের টাকা কে কত পাইবে ?

রামের মূলধন : হরির মূলধন $=1200:800=3:2$;

$3+2=5$;

$\therefore$ রামের লভ্যাংশ $=300$ টা. $\times \frac{3}{5}=180$ টাকা

এবং হরির লভ্যাংশ $=300$ টা. $\times \frac{2}{5}=120$ টাকা।

উদাহরণ 2. 1950 সালের 1লা জানুয়ারী A কোন ব্যবসায়ে 800 টাকা, 1লা মে B উহাতে 600 টাকা এবং 1লা জুলাই C 500 টাকা খাটাইল। যদি ঐ বৎসরে মোট 348 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে লাভের অংশ কে কত পাইবে ?

এখানে A-এর টাকা 12 মাস, B-এর টাকা 8 মাস এবং C-এর টাকা 6 মাস খাটিয়াছে।

অতএব, A-এর অংশ : B-এর অংশ : C-এর অংশ

$=800\times 12:600\times 8:500\times 6=9600:4800:3000$

$=16:8:5.\quad 16+8+5=29.$

$\therefore$ A-র লভ্যাংশ $=\overset{12}{\cancel{348}}$ টাকা $\times \frac{16}{\cancel{29}}=192$ টাকা,

B " " $=348$ টাকা $\times \frac{8}{29}=96$ টাকা,

এবং C " " $=348$ টাকা $\times \frac{5}{29}=60$ টাকা।

প্রশ্নমালা 5

1. কোন ব্যবসায়ে তিন জন অংশীদারের মূলধন যথাক্রমে 713 টা. 15 পয়সা, 964 টা. 85 পয়সা ও 2391 টা. 15 পয়সা। উহাতে 2231 টাকা লাভ হইলে, লভ্যাংশ অংশীদারগণ কে কত পাইবে ?

2. A ও B যথাক্রমে 600 ও 750 টাকা কোন ব্যবসায়ে নিয়োজিত করিল। এক বৎসরে যদি 72 টাকা ক্ষতি হইয়া থাকে, তবে ক্ষতির পরিমাণ কাহার কত হইবে ?

3. A, B ও C একত্রে 1500 টাকা লইয়া কোন ব্যবসায় করিল এবং বৎসরান্তে A 80 টাকা, B 100 টাকা ও C 120 টাকা লাভ পাইল। কে কত মূলধন দিয়াছিল ?

4. A ও B যৌথ ব্যবসায়ে 150 টাকা লাভ করিল। যদি A-র মূলধন 600 টাকা ও লভ্যাংশ 90 টাকা হয়, তবে B-এর মূলধন কত ?

5. তিন ব্যক্তি একত্রে ব্যবসায় করিল। তাহাদের মূলধনের অনুপাত 3 : 8 : 5 ছিল এবং তৃতীয় ব্যক্তি অপেক্ষা প্রথম ব্যক্তি 60 টাকা কম লাভ পাইল। ঐ ব্যবসায়ে মোট কত লাভ হইয়াছিল ?

6. A, B ও C কোন যৌথ ব্যবসায় করিয়া 1000 টাকা লাভ করিল। যদি A ও B-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং B ও C-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয়, তবে লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [ক. প্র. 1932]

7. A 500 টাকা লইয়া কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 3 মাস পরে B এবং 5 মাস পরে C ঐ ব্যবসায়ে যোগ দিল। যদি B 600 টাকা এবং C 800 টাকা মূলধন দিয়া থাকে এবং বৎসরান্তে মোট 340 টাকা লাভ হয়, তাহা হইলে লভ্যাংশ কে কত পাইবে ?

8. A, B, C ও D একটি যৌথ ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 1লা জানুয়ারী A 1200 টাকা, 1লা এপ্রিল B 1500 টাকা, 1লা জুলাই C 1800 টাকা এবং 1লা অক্টোবর D 2100 টাকা মূলধন দিল। বৎসরান্তে 900 টাকা লাভ হইলে কে কত টাকা লাভ পাইবে ? [ঢা. বো. 1932]

9. A, B ও C একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। A 3 মাসের জন্য 9100 টাকা, B 2 মাসের জন্য 6825 টাকা এবং C 5 মাসের জন্য 8190 টাকা খাটাইল। তাহাদের মোট 4158 টাকা লাভ হইলে, লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [প. প্র. 1930]

10. A ও B যথাক্রমে 3000 ও 4500 টাকা দিয়া একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। A 8 মাস পরে আরও 2500 টাকা দিল এবং আরও 7 মাস পরে মোট 520 টাকা লাভ হইল। লভ্যাংশ কে কত পাইবে ? [প. প্র. 1926]

11. A 300 টাকা এবং B 500 টাকা মূলধন দিয়া একত্রে ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 6 মাস পরে A আরও 400 টাকা দিল, কিন্তু B 100 টাকা তুলিয়া লইল। এক বৎসর ব্যবসায় করিয়া যদি 61 টাকা 75 পয়সা লাভ হইয়া থাকে, তবে কে কত লভ্যাংশ পাইবে ?

12. একটি যৌথ ব্যবসায়ে A, B ও C-এর মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ ছিল। 4 মাস পরে A তাহার অর্ধেক মূলধন তুলিয়া লইল এবং তাহার 8 মাস পরে মোট 2024 টাকা লাভ হইল। A-এর লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[পা. প্র. 1910]

13. A ও B এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। A 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং B তাহার মূলধন 6 মাসের জন্য ঐ ব্যবসায়ে নিয়োজিত করিল। উহাতে মোট 69 টাকা লাভ হইল এবং B 46 টাকা লাভ পাইল। তাহার মূলধন কত ছিল ? [বো. প্র. 1925]

14. এক যৌথ ব্যবসায়ে B-এর মূলধন A-এর মূলধনের দেড়গুণ ছিল। 8 মাস পরে B তাহার মূলধনের অর্ধাংশ এবং আরও 2 মাস পরে A তাহার মূলধনের এক-চতুর্থাংশ তুলিয়া লইল। বৎসরান্তে 530 টাকা লাভ হইলে, কে কত লভ্যাংশ পাইবে ? [সি. সা.]

15. কোন ব্যবসায়ে A 1800 টাকা এবং B 9 মাসের জন্য 1000 টাকা খাটাইল। উভয়ের লাভের অংশ সমান হইলে A-এর টাকা কত সময়ের জন্য খাটান হইয়াছিল ?

16. A, B ও C যথাক্রমে 600 টাকা, 800 টাকা, 900 টাকা দিয়া যৌথ ব্যবসায় আরম্ভ করিল। কয়েক মাস পরে A আরও 300 টাকা উহাতে নিয়োজিত করিল। বৎসরান্তে মোট 300 টাকা লাভ হইল এবং C 108 টাকা লভ্যাংশ পাইল। A 300 টাকা কখন দিয়াছিল ?

---

§ 2-11. মিশ্রণ (Alligation or Mixture)

বিভিন্ন পরিমাণে বিভিন্ন মূল্যের, ওজনের বা আয়তনের দ্রব্য মিশ্রিত বা একত্র করিয়া এক নূতন প্রকারের দ্রব্য প্রস্তুত করাকে **মিশ্রণ** বলে।

প্রত্যেক বস্তুর মূল্য ও পরিমাণ বলা থাকিলে উহাদের মিশ্রণে উৎপন্ন দ্রব্যের মূল্য নির্ণয় করা যায়। এই মূল্যকে **পড়তা** বলে। এই পড়তা ও বিভিন্ন দ্রব্যগুলির গড়মূল্য একই।

আবার, বিভিন্ন মূল্যের বিভিন্ন দ্রব্য কি অনুপাতে মিশাইলে নির্দিষ্ট মূল্যের মিশ্রিত দ্রব্য উৎপন্ন হইবে, তাহাও নির্ণয় করা যায়। পরপৃষ্ঠায় উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. প্রতি কিলোগ্রাম 8 টাকা 5 পয়সা দরের চায়ের সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 8 টাকা 21 পয়সা দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 8 টাকা 9 পয়সা হইবে ?

প্রথম প্রকারের 1 কি. গ্রাম চায়ের মূল্য 1 কি. গ্রা. মিশ্রিত চায়ের মূল্য অপেক্ষা (8 টাকা 9 প.—8 টা. 5 প.) বা 4 পয়সা কম।

∴ মিশ্রণে প্রথম প্রকারের প্রতি কিলোগ্রাম চায়ে 4 পয়সা লাভ।

আবার, দ্বিতীয় প্রকারের 1 কি. গ্রাম চায়ের মূল্য 1 কি. গ্রাম মিশ্রিত চায়ের মূল্য অপেক্ষা (8 টা. 21 প.—8 টা. 9 প.) বা 12 পয়সা বেশী।

∴ মিশ্রণে দ্বিতীয় প্রকারের প্রতি কিলোগ্রাম চায়ে 12 পয়সা ক্ষতি।

এক্ষণে উভয় প্রকারের চা এরূপ পরিমাণে মিশাইতে হইবে, যেন প্রথম পক্ষের লাভ ও দ্বিতীয় পক্ষের ক্ষতি সমান হয়। স্পষ্টতঃ, 4 প. × 12 = 12 প. × 4.

∴ উভয়ের অনুপাত 4 ও 12-র **ব্যস্ত অনুপাত** হইবে।

∴ নির্ণেয় অনুপাত $= 12 : 4 = 3 : 1$.

§ 2.11. তরল পদার্থের মিশ্রণ

উদাহরণ 2. সম-আয়তনের দুইটি গ্লাসে যথাক্রমে $\frac{1}{5}$ ও $\frac{1}{6}$ অংশ দুগ্ধ ছিল। পরে প্রত্যেক গ্লাস জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া একটি বড় পাত্রে গ্লাস দুইটির মিশ্রিত দুগ্ধ ঢালা হইল। এখন দুগ্ধ ও জলের অনুপাত কত হইল ?

প্রথম পাত্রের $\frac{1}{5}$ অংশ দুধ, সুতরাং $(1-\frac{1}{5})$ বা $\frac{4}{5}$ অংশ জল,
দ্বিতীয় „ $\frac{1}{6}$ „ „ „ $(1-\frac{1}{6})$ বা $\frac{5}{6}$ অংশ জল।

∴ তৃতীয় পাত্রে $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$ বা $\frac{11}{30}$ অংশ দুধ এবং $(\frac{4}{5}+\frac{5}{6})$ বা $\frac{49}{30}$ অংশ জল।

∴ নির্ণেয় অনুপাত $= \frac{11}{30} : \frac{49}{30} = 11 : 49$.

উদাহরণ 3. একটি পূর্ণ পাত্রে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল মিশ্রিত ছিল। ঐ মিশ্রিত দুধের কত অংশ তুলিয়া লইয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিলে ঐ পাত্রে অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে ?

প্রথমে মিশ্রিত দুধে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল ছিল অর্থাৎ (3+1) বা 4 ভাগে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল ছিল, সুতরাং উহার $\frac{3}{4}$ অংশ দুধ ও $\frac{1}{4}$ অংশ জল ছিল। পরে $\frac{3}{4}$ অংশ দুধের স্থলে $\frac{1}{2}$ অংশ দুধ হইবে ; সুতরাং দুধের অংশ $(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})$ বা $\frac{1}{4}$ কমাইতে হইবে।

এখন দেখ, $\frac{1}{4}$ অংশ দুধ কমাইতে ঐ মিশ্রিত পদার্থ কতটুকু তুলিয়া লইতে হইবে।

$\frac{3}{4}$ অংশ দুধ আছে সমস্ত মিশ্রিত দুধে
∴ 1 „ „ „ $\frac{4}{3}$ ভাগ „ „
∴ $\frac{1}{4}$ „ „ „ $\frac{4}{3} \times \frac{1}{4}$ বা $\frac{1}{3}$ অংশ মিশ্রিত দুধে।

অতএব, ঐ মিশ্রিত দুধের $\frac{1}{3}$ অংশ তুলিয়া লইয়া ঐ পরিমাণ জল মিশাইতে হইবে।

উদাহরণ 4. 48 লিটার জল-মিশ্রিত দুধে, দুধ ও জলের অনুপাত 7 : 5, উহাতে আর কত দুধ মিশাইলে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 2 হইবে ?

মনে কর, 48 লিটারের মধ্যে x লিটার দুধ, সুতরাং $48-x$ লিটার জল আছে।

$$\therefore \quad \frac{x}{48-x}=\frac{7}{5}, \quad \text{বা,} \quad 5x=336-7x$$

$$\text{বা,} \quad 12x=336, \quad \therefore \quad x=\frac{336}{12}=28.$$

অতএব, প্রথম মিশ্রণে দুধের পরিমাণ 28 লিটার এবং জলের পরিমাণ (48 – 28) বা 20 লিটার।

দ্বিতীয় মিশ্রণে মনে কর y লিটার দুধ মিশাইতে হইবে, জল একই থাকিবে।

$$\therefore \quad \frac{28+y}{20}=\frac{3}{2}, \quad \text{বা,} \quad 56+2y=60,$$

$$\text{বা,} \quad 2y=60-56=4, \quad \therefore \quad y=2.$$

অতএব, 2 লিটার দুধ মিশাইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 6

1. 136 টাকা ও 141 টাকা কুইণ্টাল দরের দুই প্রকার চিনি 2 : 3 অনুপাতে মিশাইলে প্রতি কুইণ্টাল মিশ্রিত চিনির মূল্য কত হইবে ?

2. এক গোয়ালা 1 টা. 25 প. ও 1 টা. 50 প. লিটার দরের দুই প্রকার দুগ্ধ 2 : 3 অনুপাতে মিশাইল। উহা প্রতি লিটার কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার মূলধন ও লাভের অনুপাত 4 : 1 হইবে ?

3. এক কি. লি. দুধে 2 হে. লি. 5 ডে. লি. হিসাবে জল মিশাইয়া এক ব্যক্তি এক কি. লি. দুধের ক্রয়মূল্যে প্রতি কি. লি. মিশ্রিত দুগ্ধ বিক্রয় করিল ; ইহাতে তাহার ক্রয়মূল্য ও লাভের অনুপাত কত হইবে ?

4. 2 : 8 অনুপাতে দুই প্রকার গম মিশ্রিত করায় প্রতি কুইণ্টালের মূল্য 80 টাকা 12 পয়সা হইল। এক কুইণ্টাল প্রথম প্রকার গমের মূল্য 80 টাকা 60 পয়সা হইলে, দ্বিতীয় প্রকার গমের প্রতি কুইণ্টালের মূল্য কত ?

5. 3 : 5 অনুপাতে দুই প্রকার দুগ্ধ মিশ্রিত করায় প্রতি লিটারের মূল্য 1 টা. 19 পয়সা হইল। প্রতি লিটার প্রথম প্রকার দুগ্ধের মূল্য 1 টা. 9 পয়সা হইলে, দ্বিতীয় প্রকারের প্রতি লিটার দুগ্ধের মূল্য কত ?

6. প্রতি কুইণ্টাল 180 টাকা ও 250 টাকা দরের দুই প্রকার চিনি কি অনুপাতে মিশাইলে মিশ্রিত চিনির প্রতি কুইণ্টালের মূল্য 220 টাকা হইবে ?

7. দুইটি সমান আয়তনের পাত্রের যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশ দুগ্ধপূর্ণ ছিল। উহাদিগের অবশিষ্টাংশ জলপূর্ণ করিয়া অপর একটি পাত্রে সমগ্র জলমিশ্রিত দুগ্ধ চালা হইল। নূতন পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত নির্ণয় কর ?

8. একটি পাত্রে 3 ভাগ জল ও 5 ভাগ সিরাপ মিশ্রিত করা আছে। ঐ মিশ্রণের কত অংশ তুলিয়া লইয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিয়া দিলে জল ও সিরাপের পরিমাণ সমান হইবে? [মা. 1924 ; ব. প্র.]

9. একটি পিপায় 65 মিরিয়া লিটার জল-মিশ্রিত মদ্য ছিল এবং উহাতে মদ্য ও জলের অনুপাত 10 : 3 ছিল। উহাতে আর কত মিরিয়া লিটার জল মিশ্রিত করিলে মদ্য ও জলের অনুপাত 8 : 5 হইবে?

10. একটি পাত্রে 5 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল আছে। ঐ জল-মিশ্রিত দুধের কতটুকু তুলিয়া লইয়া তাহার পরিবর্তে জল ঢালিলে, অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে?

11. সোনা জল অপেক্ষা 19 গুণ ভারী ও তামা জল অপেক্ষা 9 গুণ ভারী। কি অনুপাতে ধাতু দুইটি মিশ্রিত করিলে মিশ্র ধাতুটি জল অপেক্ষা 12 গুণ ভারী হইবে?

12. একটি পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 5 এবং অন্য একটি পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত 6 : 1 ; পাত্র দুইটি হইতে কি অনুপাতে মিশ্রণ দুইটি মিশ্রিত করিলে নতুন মিশ্রণে দুধ ও জলের অনুপাত 7 : 3 হইবে?
[বি. সি. এস. '56]

13. সিরাপ ও জল একটি পাত্রে 3 : 2 অনুপাতে এবং অপর একটি পাত্রে 4 : 5 অনুপাতে মিশ্রিত আছে। কত লিটার দ্বিতীয় মিশ্রণের সহিত 3 লিটার প্রথম মিশ্রণ মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে সিরাপ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে? [বি. সি. এস. 1957]

14. দুইটি তরল পদার্থের ঘনত্বের অনুপাত 5 : 3 এবং ঘনতর তরল পদার্থটি জলের 1·25 গুণ ভারী হইলে

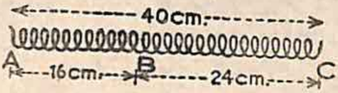
(i) সম আয়তনে মিশ্রিত এবং (ii) সম ওজনে মিশ্রিত তরল পদার্থ দুইটির 1 লিটারের ওজন কত হইবে?

15. একটি পাত্র 18 কি. লিটার দুধে পূর্ণ ছিল। উহা হইতে 2 কি. লি. তুলিয়া লইয়া জল ঢালিয়া পাত্রটি পূর্ণ করা হইল। পুনরায় ঐ পাত্র হইতে 2 কি. লি. তুলিয়া লইয়া জল ঢালিয়া পূর্ণ করা হইল। তৃতীয়বারও ঐরূপ করার পর পাত্রটিতে দুধ ও জলের অনুপাত কত হইবে?

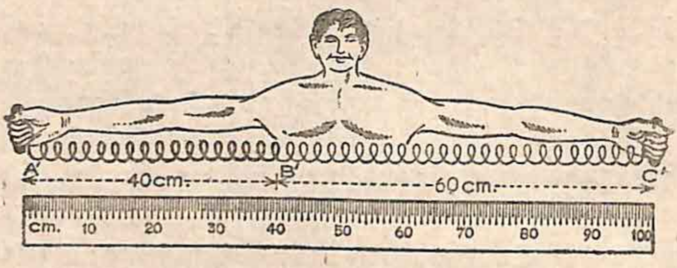
16. 3 টাকা 20 পয়সা লিটার দরের দুধের সহিত কি অনুপাতে জল মিশ্রিত করিলে প্রতি লিটার জলমিশ্রিত দুধের দাম 3 টাকা হইবে?

17. ছোট বড় সব রকমের মেশান আলুর দাম কিলোগ্রাম প্রতি 1 টাকা 40 পয়সা। ঐ আলু বড় ও ছোট হিসাবে বাছাই করিয়া দেখা গেল তাহাদের পরিমাণের অনুপাত 3 : 2. বড় আলু প্রতি কিলোগ্রাম 1 টাকা 50 পয়সা হিসাবে বিক্রয় করিয়া কোন লোকসান না দিতে গেলে ছোট আলু কি দামে বিক্রয় করিতে হইবে?

শতকরা হিসাব (Percentage)



5 (ক) নং চিত্র

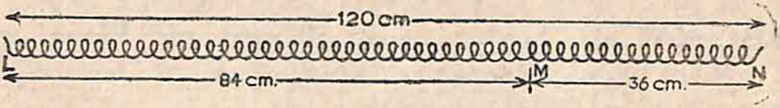


5 (খ) নং চিত্র

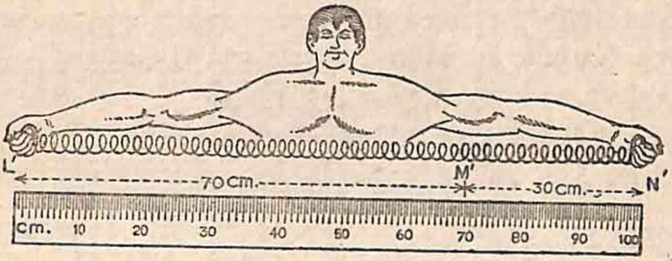
3.1. শতকরা ও শতকরা হিসাবের সংজ্ঞা :—

5 (ক) নং চিত্রে 40 সে. মি. লম্বা একটি স্প্রিং ABC দেখান হইয়াছে, উহার 16 সে. মি. লম্বা AB অংশটি কালো রঙের এবং 24 সে. মি. লম্বা BC অংশটি সাদা রঙের। 5 (খ) নং চিত্রে একটি লোক ঐ স্প্রিংটিকে দুই দিকে টান দিয়া 100 সে. মি. লম্বা করায় উহার 16 সে. মি. লম্বা কালো AB অংশটি 40 সে. মি. লম্বা A′B′ এবং 24 সে. মি. লম্বা সাদা BC অংশটি 60 সে. মি. লম্বা B′C′ হইয়াছে।

পর পৃষ্ঠায় 6 (ক) নং চিত্রে 120 সে. মি. লম্বা একটি স্প্রিং LMN দেখান হইয়াছে, উহার 84 সে. মি. লম্বা LM অংশটি সাদা রঙের এবং 36 সে. মি. লম্বা MN অংশটি কালো রঙের। 6 (খ) নং চিত্রে একটি লোক ঐ স্প্রিংটিকে দুই দিক হইতে চাপ দিয়া 100 সে. মি.-এ সঙ্কুচিত করায় উহার 84 সে. মি. লম্বা সাদা



6 (ক) নং চিত্র



6 (খ) নং চিত্র

LM অংশটি 70 সে. মি. L'M' এবং 36 সে. মি. লম্বা কালো MN অংশটি 30 সে. মি. M'N'-এ পরিণত হইয়াছে।

সুতরাং, 5 (ক) নং চিত্রে AB অংশটি AC-র $\frac{16}{40}$ এবং BC অংশটি AC-র $\frac{24}{40}$, কিন্তু 5 (খ) নং চিত্রে A'B' অংশটি A'C'-এর $\frac{40}{100}$ অর্থাৎ 100 ভাগের মধ্যে 40 ভাগ এবং B'C' অংশটি A'C'-এর $\frac{60}{100}$ অংশ অর্থাৎ 100 ভাগের মধ্যে 60 ভাগ। 6 (ক) নং চিত্রে LM অংশটি LN-এর $\frac{84}{120}$ এবং MN অংশটি LN-এর $\frac{36}{120}$; কিন্তু 6 (খ) নং চিত্রে L'M' অংশটি L'N'-এর $\frac{70}{100}$ অর্থাৎ 100 ভাগের মধ্যে 70 ভাগ এবং M'N' অংশটি L'N'-এর $\frac{30}{100}$ অর্থাৎ 100 ভাগের মধ্যে 30 ভাগ।

শতকরা (Per cent) **কথাটির দ্বারা প্রতি শতে অর্থাৎ প্রত্যেক 100তে বুঝায়। এইরূপ একশতর উপর যে হিসাব করা হয়, তাহাকে শতকরা হিসাব বলে।** শতকরা বুঝাইবার জন্য '%' এই সাঙ্কেতিক চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে 1 এককের উপর হিসাব হয় না।

§ 3.2. শতকরা, ভগ্নাংশ, দশমিক ও অনুপাতের পারস্পরিক সম্পর্ক :

মনে কর, তোমার নিকট 10 টাকা ছিল। তুমি তাহা হইতে 3 টাকা খরচ করিয়াছ। তাহা হইলে বলা যায় যে তুমি তোমার টাকার $\frac{3}{10}$ অংশ

খরচ করিয়াছ। উহার হরকে যদি 100তে পরিণত করা হয়, তবে উহা হইবে $\frac{3\times10}{10\times10}$ বা $\frac{30}{100}$. তোমরা ভগ্নাংশ শিখিবার সময় দেখিয়াছ যে, $\frac{30}{100}$ বলিলে 100 ভাগের 30 ভাগ বুঝায়। $\frac{30}{100}$ এবং $\frac{3}{10}$ একই ভগ্নাংশ, সুতরাং বুঝা গেল যে, 10-এর মধ্যে 3 যাহা, এক শতের মধ্যে 30-ও তাহাই। অতএব বলিতে পারা যায় যে, তুমি শতকরা 30 টাকা খরচ করিয়াছ।

এখানে অবশ্য তুমি প্রকৃতপক্ষে 30 টাকা খরচ কর নাই, মাত্র 3 টাকা খরচ করিয়াছ ; কিন্তু প্রতি 10 টাকায় 3 টাকা খরচ করিলেই 100 টাকাতে 30 টাকাই খরচ হয়। ইহা অন্য প্রকারে বুঝিয়া দেখ,

তুমি 10 টাকার খরচ করিয়াছ 3 টাকা
অতএব „ 1 „ „ „ $\frac{3}{10}$ „
„ 100 „ „ „ $\frac{3}{10}\times100$ বা 30 টাকা।

ইহা হইতে দেখিলে যে $\frac{3}{10}$ অংশও যাহা, শতকরা 30-ও তাহাই। সুতরাং **কোন ভগ্নাংশকে 100 দিয়া গুণ করিলেই শতকরা হিসাব পাওয়া যায়।**

আবার দেখ, যদি বলা হয় যে, শতকরা 40 জন বালক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হইয়াছে, তবে বুঝাইবে যে প্রত্যেক 100 জনের মধ্যে 40 জন অর্থাৎ বালকগুলির 100 ভাগের 40 ভাগে বা $\frac{40}{100}$ উত্তীর্ণ হইয়াছে। ইহা হইতে জানা গেল যে, **শতকরা কত বলা থাকিলে তাহাকে 100 দিয়া ভাগ করিলে তাহা ভগ্নাংশে প্রকাশিত হয়।**

এখানে বলা যাইতে পারে যে, যেহেতু অনুপাত একটি ভগ্নাংশ, এতএব অনুপাতের পূর্ব বা উত্তর রাশিকে 100তে পরিণত করিয়া শতকরা হিসাব পাওয়া যায়। যথা,—2 : 5 এই অনুপাতকে 100 : 250 অথবা 40 : 100 রূপে প্রকাশ করা যায় ; অর্থাৎ পূর্ব রাশির তুলনায় উত্তর রাশিটি 250% বা উত্তর রাশির তুলনায় পূর্ব রাশিটি 40%। আবার দশমিককেও ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় বলিয়া দশমিককে শতকরায়ও প্রকাশ করা যায়। যথা,— $\cdot21=\frac{21}{100}=\frac{21}{100}\times100\%=21\%$.

উদাহরণ 1. (i) শতকরা 55কে ভগ্নাংশ, দশমিক ও অনুপাতে প্রকাশ কর।

(ii) $\frac{4}{5}$, ·36 ও 7 : 10কে শতকরায় প্রকাশ কর।

(iii) একটি গহনায় সোনা ও তামার অনুপাত 3 : 2 হইলে উহাতে শতকরা কি পরিমাণ সোনা আছে ?

(i) শতকরা 55 বা $55\%=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$ (ভগ্নাংশে) $=\cdot55$ (দশমিকে)
$=11:20$ (অনুপাতে)।

(ii) $\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times 100\%=80\%$;
$\cdot 36=\frac{36}{100}=\frac{36}{100}\times 100\%=36\%$;
$7 : 10=\frac{7}{10}=\frac{7}{10}\times 100\%=70\%$.

(ii) $\because$ সোনা ও তামার অনুপাত 3 : 2, অতএব গহনাটিতে $\frac{3}{5}$ অংশ সোনা আছে।

সোনার পরিমাণ $=\frac{3}{5}\times 100\%=60\%$.

উদাহরণ 2. কোন দুর্গে 5400 সৈন্য ছিল। উহাদের শতকরা $7\frac{1}{2}$ জন মারা গেল, মোট কত সৈন্য মারা গেল ?

শতকরা $7\frac{1}{2}=\dfrac{7\frac{1}{2}}{100}=\dfrac{15}{2\times 100}=\dfrac{3}{40}$.

$\therefore$ মোট মৃত সৈন্যের সংখ্যা $=\frac{5400\times 3}{40}=405$.

উদাহরণ 3. কোন ব্যক্তি 9000 টাকা ধার দিয়া 750 টাকা সুদ পাইল। শতকরা সুদের হার কত ?

9000 টাকার উপর সুদ $=750$ টাকা

$\therefore$ 1 „ „ „ $=\frac{750}{9000}$ টাকা

$\therefore$ 100 „ „ „ $=\frac{750}{9000}\times 100$ টাকা $=8\frac{1}{3}$ টাকা।

$\therefore$ সুদের হার = শতকরা $8\frac{1}{3}\%$.

বীজগণিতের নিয়মে :

মনে কর, শতকরা সুদের হার x টাকা।

সুতরাং প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\dfrac{x}{750}=\dfrac{10\not{0}}{900\not{0}}$

$\therefore\ 90x=750$; $\therefore\ x=\frac{750}{90}$ বা, $8\frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $8\frac{1}{3}\%$.

উদাহরণ 4. কোন পরীক্ষায় শতকরা 20 জন অকৃতকার্য হইল। যদি মোট 400 জন পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হইয়া থাকে, তবে কতজন পরীক্ষা দিয়াছিল ?

মনে কর, পরীক্ষার্থীর সংখ্যা x.

xএর 20% অকৃতকার্য হইয়াছে এবং বাকী 400 জন কৃতকার্য হইয়াছে।

$\therefore\ x=x$এর $20\%+400=\frac{1}{5}x+400$,

বা, $x-\frac{1}{5}x=400$, বা, $\frac{4}{5}x=400$, $\therefore\ x=400\times\frac{5}{4}=500$.

অতএব 500 জন পরীক্ষা দিয়াছিল।

[**দ্রষ্টব্য :** কোন সংখ্যার 100% বলিলে সেই পূরা সংখ্যাকে বুঝায়।]

(**অথবা**) শতকরা $80=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$. অতএব, নির্ণেয় সংখ্যার $\frac{4}{5}=400$,

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=400\times\frac{5}{4}=500$.

উদাহরণ 5. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 2490 ; যদি একটি সংখ্যার 6·5% অন্য সংখ্যাটির 8·5%এর সমান হয়, তবে সংখ্যা দুইটি কত ?

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় x ও y.

অতএব, প্রদত্ত শর্তানুসারে $x+y=2490\cdots(1)$

এবং xএর 6·5% = yএর 8·5%$\cdots(2)$

(2) হইতে পাই $\frac{6·5}{100}x=\frac{8·5}{100}y$,

বা, $6·5x=8·5y$, $\therefore\ x=\frac{8·5}{6·5}y=\frac{85}{65}y=\frac{17}{13}y$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $\frac{17}{13}y+y=2490$, বা, $\frac{30}{13}y=2490$,

$\therefore\ y=2490\times\frac{13}{30}=1079$, $\therefore\ x=2490-1079=1411$.

$\therefore$ সংখ্যাদ্বয়=1411 ও 1079.

উদাহরণ 6. চাউলের মূল্য $12\frac{1}{2}$% কমাতে টাকায় 2 ডেকা গ্রাম চাউল বেশী পাওয়া গেল। পূর্বে টাকায় কত চাউল পাওয়া যাইত ?

$$12\tfrac{1}{2}\%=\frac{12\frac{1}{2}}{100}=\frac{1}{8}.$$

পূর্বে 1 টাকায় যত চাউল পাওয়া যাইত, দাম কমাতে এখন $(1-\frac{1}{8})$ বা $\frac{7}{8}$ টাকায় তত চাউল পাওয়া গেল। বাকি যে $\frac{1}{8}$ টাকা রহিল তাহাতে আরও 2 ডে. গ্রা. চাউল পাওয়া গেল। অতএব, এখন $\frac{1}{8}$ টাকায় 2 ডে. গ্রা. চাউল পাওয়া যায়, সুতরাং $\frac{7}{8}$ টাকায় উহার 7 গুণ বা 14 ডে. গ্রা. চাউল পাওয়া গিয়াছে। অতএব পূর্বে 1 টাকায় 14 ডেকাগ্রাম চাউল পাওয়া যাইত।

উদাহরণ 7. কোন ক্লাবে প্রতি বৎসর সভ্যসংখ্যা 10% করিয়া বৃদ্ধি পায়। প্রথমে 400 সভ্য থাকিলে তৃতীয় বৎসরে সভ্যসংখ্যা কত হইবে ?

প্রতি বৎসর সভ্যসংখ্যা 10% বাড়ে, অর্থাৎ পূর্ব সংখ্যার $\frac{110}{100}$ গুণ হয় ?

$\therefore$ এস্থলে দ্বিতীয় বৎসরের সভ্যসংখ্যা $=\frac{110}{100}\times400$,

$\therefore$ তৃতীয় বৎসরের নির্ণেয় সভ্যসংখ্যা দ্বিতীয় বৎসরের সংখ্যার $\frac{110}{100}$

$$=\frac{110}{100}\times\frac{110}{100}\times400=484.$$

[দ্রষ্টব্য : এইরূপ প্রশ্নের জন্য একটি সূত্র নির্ণয় করা যাইতে পারে। মনে কর, আদি সংখ্যা "আ", বৎসরে শতকরা বৃদ্ধির হার "হা", বৎসরের সংখ্যা "ব" এবং শেষ বর্ধিত সংখ্যা "বৃ"। উপরের সমাধান দেখিয়া সূত্রটি পাই।

এক্ষণে আদি সংখ্যা হইতে শেষ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্র হইবে :—

$$\text{বৃ}=\text{আ}\left(1+\frac{\text{হা}}{100}\right)^{\text{ব}}।$$

আবার, পরের বর্ধিত সংখ্যা হইতে গোড়ার সংখ্যা নির্ণয় করিবার সূত্র হইবে : $আ = \frac{বৃ}{\left(1+\frac{হা}{100}\right)^{ব}}$ অর্থাৎ $আ = বৃ\left(\frac{100}{100+হা}\right)^{ব}$।]

উদাহরণ 8. কোন ব্যক্তির প্রত্যেক বৎসরে 10% হারে বেতন বৃদ্ধি হইয়া তৃতীয় বৎসরে 484 টাকা বেতন হইল। প্রথমে তাহার বেতন কত ছিল ?

10% বৃদ্ধির অর্থ 100 টাকার স্থানে 110 টাকা হওয়া। অতএব, পূর্ব বৎসরের বেতন পর-বৎসরের বেতনের $\frac{100}{110}$ অংশ।

এখানে তৃতীয় বৎসরের প্রথমে বেতন হইয়াছে 484 টাকা,

∴ দ্বিতীয় বৎসরের গোড়ার বেতন ছিল $\frac{100}{110} \times 484$ টাকা,

∴ প্রথম বৎসরের গোড়ায় বেতন ছিল $\frac{100}{110} \times \frac{100}{110} \times 484$ টাকা
$= 400$ টাকা (উত্তর)।

উদাহরণ 9. কোন বিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীদের 70% বালক এবং অবশিষ্ট বালিকা ; 32 জন বালক চলিয়া গেল এবং 32 জন বালিকা ভর্তি হইল। ইহাতে বালকের সংখ্যা শতকরা 54 হইল। ঐ বিদ্যালয়ের মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

32 জন বালকের স্থানে 32 জন বালিকা ভর্তি হওয়ায় মোট সংখ্যা একই আছে। 32 জন বালক কম হওয়ায় শতকরা (70 − 54) বা 16% কমিয়াছে ;

∴ সমস্ত সংখ্যার 16% = 32

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{32}{16} \times 100$ জন $= 200$ জন।

উদাহরণ 10. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 35% গণিতে এবং 40% ইংরাজীতে পাশ করিতে পারে নাই। যদি উভয় বিষয়ে শতকরা 15 জন অকৃতকার্য হইয়া থাকে, তবে উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন পাশ করিয়াছে ?

মনে কর, পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা 100 জন। ঐ 100 জনের মধ্যে যে 35 জন গণিতে ফেল করিয়াছে তাহাদের মধ্যে উভয় বিষয়ে ফেল করা 15 জনও আছে। অতএব শুধু গণিতে ফেল করিয়াছে (35 − 15) বা 20 জন।

আবার, ঐ 100 জনের মধ্যে যে 40 জন ইংরাজীতে ফেল করিয়াছে, তাহাদের মধ্যেও উভয় বিষয়ে ফেল করা ঐ 15 জন আছে। সুতরাং শুধু ইংরাজীতে ফেল করিয়াছে (40 − 15) বা 25 জন।

সুতরাং 100 জনের মধ্যে সর্বরকমে মোট (20 + 25 + 15) জন বা 60 জন ফেল করিয়াছে। ∴ উভয় বিষয়ে শতকরা (100 − 60) জন বা 40% পাশ করিয়াছে।

উদাহরণ 11. কোন পরীক্ষায় 80% ইংরাজীতে এবং 85% গণিতে পাশ করিয়াছে, কিন্তু উভয় বিষয়ে 75% পাশ করিয়াছে। যদি মাত্র 45 জন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করিয়া থাকে, তবে কতজন পরীক্ষা দিয়াছিল ?

মনে কর, পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 100 জন। উহাদের মধ্যে 80% হিসাবে ইংরাজীতে পাশের সংখ্যা 80 জন, এবং 85% হিসাবে গণিতে পাশের সংখ্যা 85 জন, কিন্তু ইংরাজী ও গণিত উভয় বিষয়ে পাশের সংখ্যা 75 জন।

∴ 100 জনের মধ্যে শুধু ইংরাজীতে পাশের সংখ্যা $=(80-75)$ বা 5 জন এবং শুধু গণিতে পাশের সংখ্যা $=(85-75)$ বা 10 জন।

অতএব, শুধু ইংরাজীতে, শুধু গণিতে এবং উভয় বিষয়ে পাশ করার সংখ্যা (ইহাদের কেহই উভয় বিষয়ে ফেল নহে) $=(5+10+75)$ বা 90 জন।

∴ 100 জনের মধ্যে উভয় বিষয়ে ফেলের সংখ্যা $=(100-90)$ বা 10 জন।

10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করিলে মোট পরীক্ষার্থী হয় 100 জন,

∴ 45 „ „ „ „ „ „ „ $\frac{100}{10}\times 45$ বা 450 জন,

∴ নির্ণেয় পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা $=450$.

উদাহরণ 12. একটি খাঁচায় 50টি মুরগী আছে। উহারা 10 দিনে 375টি ডিম দিল, দিনে শতকরা কি হারে ডিম পাওয়া গেল ?

[এখানে শতকরা নির্ণয় করিবার নিয়ম হইল $\dfrac{\text{ডিমের সংখ্যা}\times 100}{\text{মুরগীর সংখ্যা}\times\text{দিন সংখ্যা}}$]

∴ নির্ণেয় উত্তর হইল শতকরা $\frac{375\times100}{50\times10}$ বা 75%।

উদাহরণ 13. রাম ও রহিমের বয়সের অনুপাত 4 : 5 হইলে রহিমের বয়সকে রামের বয়সের শতকরায় প্রকাশ কর।

$$\frac{\text{রামের বয়স}}{\text{রহিমের বয়স}}=\frac{4}{5}=\frac{100}{125},$$

∴ রহিমের বয়স রামের বয়সের 125%.

প্রশ্নমালা 7

নিম্নের শতকরা হারগুলিকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত কর :

1. শতকরা 5 2. শতকরা 12 3. শতকরা 25
4. শতকরা 80 5. শতকরা $12\frac{1}{2}$ 6. শতকরা $3\frac{1}{3}$
7. 55% 8. 75% 9. 40%
10. $6\frac{2}{3}\%$ 11. $14\frac{2}{7}\%$ 12. $8\frac{1}{3}\%$
13. $13\frac{1}{3}\%$ 14. $16\frac{2}{3}\%$ 15. $18\frac{3}{4}\%$
16. $33\frac{1}{3}\%$ 17. $26\frac{2}{3}\%$ 18. $2\frac{2}{9}\%$

নিম্নের ভগ্নাংশ ও দশমিকগুলিকে শতকরা হারে প্রকাশ কর :—

19. $\frac{8}{15}$ 20. $2\frac{1}{10}$ 21. $7\frac{1}{4}$ 22. ·125

23. ·05 24. $\cdot\dot{8}$ 25. $\cdot1\dot{6}$.

মান নির্ণয় কর :—

26. 240 টাকার 15% 27. 70 কুইণ্টালের 35%

28. 12 টাকা 8 পয়সার $12\frac{1}{2}$% 29. 4 কি. গ্রা. 4 হে. গ্রামের $7\frac{1}{2}$%

30. 24 লিটারের $37\frac{1}{2}$% 31. 250 মি. 15 সে. মি.-এর 20%

32. $8\frac{1}{3}$%এর সমান কোন্ অনুপাতের উত্তররাশি 100 ?

33. তুমি ইংরাজী পরীক্ষায় 20টি প্রশ্নের মধ্যে 19টি প্রশ্নের উত্তর দিয়াছ। তুমি শতকরা কয়টি প্রশ্নের উত্তর দিয়াছ ?

34. কত টাকার $12\frac{1}{2}$% খরচ করিলে 320 টাকা খরচ হয় ?

35. কত কিলো গ্রামের $3\frac{1}{3}$% খরচ হইলে 58 কিলোগ্রাম থাকে ?

36. 15 টাকা কত টাকার 20% ?

37. 4 কিলো লিটার 8 হেক্টো লিটার দুধের সহিত 16 হে. লি. জল মিশ্রিত করা হইল। ঐ মিশ্রিত দুধে শতকরা কত জল আছে ?

38. বারুদ প্রস্তুত করিতে 65% সোরা, 20% কাঠকয়লা এবং 15% গন্ধক লাগে। এক টোনে বারুদে ঐ দ্রব্যগুলি কি পরিমাণ আছে ?

39. A-এর আয় B-এর আয় অপেক্ষা 25% বেশী ; A-এর আয় অপেক্ষা B-এর আয় শতকরা কত কম ?

40. একদিন টাকায় 15টি এবং পরদিন টাকায় 12টি কাঁচা আম কেনা হইলে দ্বিতীয় দিনে আমের মূল্য শতকরা কত বাড়িল ?

41. আকিমিডিস সিদ্ধান্ত করেন যে রাজা হিরোর মুকুটে স্বর্ণ ও রৌপ্যের অনুপাত 2 : 1 ছিল ; ঐ মুকুটে শতকরা কত স্বর্ণ ছিল ?

42. কতকগুলি পরীক্ষার্থীর শতকরা 5 জন অনুপস্থিত ছিল এবং যাহারা উপস্থিত ছিল তাহাদের 15% অকৃতকার্য হইল। যদি 3230 জন কৃতকার্য হইয়া থাকে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ছিল ?

43. কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রদের মধ্যে 70% হিন্দু এবং অবশিষ্টের 80% মুসলমান। মুসলমান ছাত্র অপেক্ষা হিন্দু ছাত্র 322 জন বেশী হইলে মোট ছাত্রসংখ্যা কত ছিল ?

44. গমের মূল্য শতকরা 10% হারে কমিয়া যাওয়ায় টাকায় 5 ডেকা গ্রাম গম বেশী পাওয়া যায়। পূর্বে টাকায় কত গম পাওয়া যাইত ?

45. যদি কাপড়ের মূল্য 75% বৃদ্ধি পায়, তবে কাপড়ের খরচ ঠিক রাখিতে হইলে গৃহস্থকে শতকরা কি পরিমাণ কাপড় ক্রয় কমাইতে হইবে ?

46. কোন ব্যবসায়ে 4000 টাকা মূলধন ছিল, প্রতি বৎসর মূলধন 10% বাড়িলে তৃতীয় বৎসরে কত মূলধন হইবে ?

47. কোন দেশের জনসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে 7% বৃদ্ধি পায়। বর্তমান জনসংখ্যা 4007150 হইলে, 20 বৎসর পূর্বে সেখানে জনসংখ্যা কত ছিল ?

48. কয়লার মূল্য 20% বেশী হওয়ায় কয়লার পরিমাণও 20% কমাইয়া দিলাম। আমার কয়লার জন্য খরচ শতকরা কত বেশী বা কম হইল ?

49. লেবুর মূল্য $13\frac{1}{3}$% বেশী হওয়ায় এখন টাকায় 4টি লেবু কম পাওয়া গেল। (1) এখন টাকায় কয়টি লেবু পাওয়া যায় ? (2) পূর্বে টাকায় কয়টি লেবু পাওয়া যাইত ?

50. এক ব্যক্তির মূলধন প্রতি বৎসর বার্ষিক 20% হারে বর্ধিত হইয়া চার বৎসর অন্তে 5184 টাকা হইল। প্রথমে কত মূলধন ছিল ? [ক. প্র. '50]

51. কোন বাগানের বৃক্ষসংখ্যার 60% আম গাছ এবং অবশিষ্ট লিচু গাছ। 30টি আম গাছ শুকাইয়া গেল এবং 30টি লিচু গাছ বসান হইল। এখন বাগানে শতকরা 45টি আমগাছ হইলে, মোট বৃক্ষসংখ্যা কত ?

52. কোন দ্রব্যের মূল্য একবার 20% এবং পরে আবার 25% হ্রাস হওয়ায় দ্রব্যটির মূল্য 45 পয়সা হইল। প্রথমে উহার মূল্য কত ছিল ?

53. তুমি 15600 টাকায় একখানি মোটরগাড়ী কিনিয়াছ। উহার মূল্য প্রথম বৎসরে 20%, পরে প্রতি বৎসরান্তে 15% করিয়া হ্রাস পাইলে, তৃতীয় বৎসরান্তে উহার মূল্য কত হইবে ?

54. একখানি 75 পয়সা মূল্যের ছবির মূল্য প্রথমে 20% বাড়িয়া পরে 20% কমিল। এখন উহার মূল্য কত ?

55. যদি কোন বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর মাপ 10% বৃদ্ধি পায়, তবে উহার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাইবে ?

56. একটি পরীক্ষায় একজন অপরজন অপেক্ষা 9 নম্বর বেশী পায় এবং তাহার নম্বর উভয়ের নম্বরের সমষ্টির 56% ; কে কত নম্বর পাইয়াছিল ?

57. কোন স্থানের জনসংখ্যা 20000 ; যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বৃদ্ধি এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% হ্রাস পাইত, তবে মোট জনসংখ্যার কোন পরিবর্তন হইত না। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1937]

58. কোন পরীক্ষায় 2500 জন পরীক্ষার্থীর $\frac{1}{5}$ অংশ বালিকা ও অবশিষ্ট বালক। বালকদের 5% এবং বালিকাদের 40% অকৃতকার্য হইল। মোট শতকরা কতজন কৃতকার্য হইল ? [মা. প্র. 1928]

59. কোন নির্বাচন প্রতিযোগিতায় একজন নির্বাচনপ্রার্থী মোট প্রদত্ত ভোটের 42% ভোট পাইয়া 352 ভোটে পরাজিত হন। ঐ নির্বাচনে মোট কত ভোট দেওয়া হইয়াছিল ?

60. কতকগুলি পরীক্ষার্থীর $37\frac{1}{2}\%$ বালিকা। বালকদের 75% এবং বালিকাদের $62\frac{1}{2}\%$ পরীক্ষায় পাশ করিল এবং 342 জন বালিকা ফেল করিল। কতজন বালক ফেল করিয়াছিল? [ঢা. বো. 1936]

61. কোন পরীক্ষায় 52% ইংরাজীতে ও 42% গণিতে অনুত্তীর্ণ হইল। যদি কেবল শতকরা 17 জন উভয় বিষয়েই অনুত্তীর্ণ হইয়া থাকে, তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে উত্তীর্ণ হইয়াছে? [ক. প্র. 1972 ; পা. প্র. 1924]

62. একটি পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 34% পাটীগণিতে এবং 42% বীজগণিতে ফেল করিল। যদি 20% উভয় বিষয়েই ফেল করিয়া থাকে, তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছে? [ক. প্র. 1944]

63. কোন বিদ্যালয়ে ছাত্রদের মধ্যে 90% বানানে, 85% অঙ্কে এবং 150 জন উভয় বিষয়েই পাশ করিল। যদি কেহই দুই বিষয়ে ফেল না করিয়া থাকে, তবে মোট ছাত্রসংখ্যা কত? [ঢা. বো. 1933]

64. কোন ব্যক্তি বাজী ধরিয়া প্রথমে তাহার টাকার 75% হারিল, দ্বিতীয় বার খেলিয়া অবশিষ্টের 75% হারিল, এইরূপে তৃতীয় বারেও অবশিষ্টের 75% হারিয়া মাত্র 2 টাকা লইয়া বাড়ী ফিরিল। প্রথমে তাহার কত টাকা ছিল?

65. কোন প্রবেশিকা পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীরা অতিরিক্ত গণিত অথবা ইতিহাস অথবা উভয় বিষয়ই লইয়াছিল ; যদি পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 20000 হয় এবং তাহাদের 65·3% অতিরিক্ত গণিত ও 61·7% ইতিহাস লইয়া থাকে, তবে কতজন উভয় বিষয় লইয়াছিল?

66. কোন পরীক্ষায় 70% সাহিত্যে ও 75% গণিতে পাশ করিল। যদি উভয় বিষয়ে 65% পাশ করিয়া থাকে এবং ঐ উভয় বিষয়ে মোট 30 জন ফেল করিয়া থাকে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

67. কোন ট্রাম কোম্পানীর মোট আয়ের 40% খরচ চালাইবার জন্য ব্যয় হয় এবং অবশিষ্টের 40% রিজার্ভ ফণ্ডে জমা রাখিয়া বাকী টাকা অংশীদারগণকে $3\frac{1}{3}\%$ হারে লভ্যাংশ দিতে ব্যয় হয়। অংশীদারগণের শেয়ারের মোট পরিমাণ 864000 টাকা হইলে, কোম্পানীর মোট আয় কত? [ক. প্র. '20 (ঐচ্ছিক]

68. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5% কমাইলে এবং প্রস্থ 5% বাড়াইলে উহার আয়তনের শতকরা কি পরিবর্তন হয়?

69. কোন সংখ্যাকে 8% বাড়াইলে এবং উহাকে 3% কমাইলে যে দুইটি সংখ্যা হয়, তাহাদের অন্তর 407 হইলে মূল সংখ্যাটি কত?

70. কোন ব্যক্তির বেতন 10% বৃদ্ধি পাইয়া পরে 10% হ্রাস পাইল। ইহাতে শতকরা মোট পরিবর্তন কত হইল?

71. দুই ব্যক্তির আয় সমান হইবে যদি একজনের আয় 7% বৃদ্ধি পায় ও অন্যের আয় $7\frac{1}{2}\%$ হ্রাস পায়। উভয়ের মোট আয় 8379 টাকা হইলে কাহার আয় কত?

72. কোন একটি সংখ্যাকে 20% বাড়ান হইল। ঐ বর্ধিত সংখ্যা হইতে শতকরা কত কমাইলে আসল সংখ্যাটি পাওয়া যাইবে?

73. এক ব্যক্তির যতগুলি ডিম ছিল সে তাহার 10% খাইয়া অবশিষ্টের $46\frac{2}{3}$% বিক্রয় করিল। তখন যদি তাহার আর 72টি ডিম থাকে, তবে প্রথমে তাহার কতগুলি ডিম ছিল?

74. কোন হাসপাতালে রোগীর সংখ্যা, নার্সের সংখ্যা, ডাক্তারের সংখ্যা ও অন্যান্য কর্মচারীর সংখ্যা যথাক্রমে শয্যা সংখ্যার 90%, 10%, 5%, ও 15% হইলে রোগীদের সহিত নার্স, ডাক্তার ও অন্যান্য কর্মচারী সমষ্টির অনুপাত নির্ণয় কর।

75. প্রতি হেক্টর জমিতে আমন ধান 1110 কিলোগ্রাম ও উন্নত ফলনশীল রত্না ধান 2775 কিলোগ্রাম উৎপন্ন হইলে, রত্না ধান চাষ করিয়া শতকরা কত বেশী ধান পাওয়া যায়?

76. একটি গরু ও একটি ঘোড়ার মূল্য 240 টাকা। ঘোড়ার মূল্য 30% এবং গরুর মূল্য 40% বাড়িলে উভয়ের মূল্যের সমষ্টি 320 টাকা হয়। প্রমাণ কর যে ঘোড়ার মূল্য গরুর মূল্যের দ্বিগুণ ছিল। [বি. সি. এস. '56]

77. রেশম বস্ত্র 10% কমিশনে বিক্রয় করা হইল। কিন্তু বিক্রয় কর যুক্ত হওয়ায় ক্রেতাকে পূর্ব-মূল্যের সম পরিমাণ দাম দিতে হইল। বিক্রয় করের শতকরা হার নির্ণয় কর।

78. টাকায় 11টি করিয়া পেয়ারা কিনিয়া কোন ব্যবসায়ী প্রতি 100 পেয়ারা 11 টাকা মূল্যে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কি পরিমাণ লাভ বা ক্ষতি হইল?

79. কোন শহরের জনসংখ্যা বার্ষিক 20% হারে বর্ধিত হইলে কত বৎসর পরের লোকসংখ্যা ও বর্তমান লোকসংখ্যার অনুপাত 36 : 25 হইবে?

80. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 6000 টাকা। তাহার সঞ্চয়ের পরিমাণ 10% বাড়াইলে ব্যয়ের পরিমাণ 6% হ্রাস করিতে হয়। তাঁহার বর্তমান ব্যয় ও সঞ্চয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

81. কোন ব্যক্তিকে, আয়ের প্রথম 5000 টাকা আয়করমুক্ত, পরবর্তী 5000 টাকায় 5% এবং তৎপরবর্তী আয়ের উপর 10% হিসাবে বার্ষিক মোট 1000 টাকা আয়কর দিতে হইলে তাহার বাৎসরিক আয়ের উপর শতকরা আয়কর-হার নির্ণয় কর।

82. মুরগীর ডিমের খোসা 10·7%, সাদা অংশ 57·7% ও কুসুম অংশ 31·6% হইলে প্রত্যেকটি 55 গ্রাম ওজনের 1 ডজন মুরগীর ডিমের সাদা ও কুসুম অংশের ওজন কত হইবে?

83. যদি কোন সমবায় বিপনন সংস্থায় যত জন সভ্য আছে প্রত্যেকের

শতকরা তত টাকা মূলধন থাকে তাহা হইলে প্রত্যেকের শতকরা কত মূলধন ছিল ?

84. একটি বাগানে যত সংখ্যক গাছ আছে প্রতি গাছে তাহার $62\frac{1}{2}\%$ ফুল আছে, এবং প্রতি গাছে যত সংখ্যক ফুল আছে বাগানে তাহার 32% প্রজাপতি আছে। যদি বাগানে মোট প্রজাপতির সংখ্যা 8 হয়, তাহা হইলে বাগানে মোট কয়টি ফুল ছিল ?

85. কোন পোল্ট্রী খামারে 370টি মুরগী আছে। ঐ খামার হইতে এক সপ্তাহে 2072টি ডিম পাওয়া গেলে মুরগীরা শতকরা কত ডিম দিয়াছে ?

86. একটি গেঞ্জীর কারখানায় কোন ব্যক্তি প্রভিডেণ্ট ফাণ্ড বাবদ 5%, চিকিৎসা বাবদ 3% এবং বাড়ীভাড়া বাবদ 10% টাকা বাদ দিয়া মাসিক 246 টাকা বেতন পাইলে তাহার বাৎসরিক আয় কত ?

87. মুদ্রামূল্য 4% হ্রাস পাইলে সমপরিমাণ দ্রব্য ক্রয় করিতে শতকরা কত টাকা বেশী লাগিবে ?

88. কোন কারখানায় মোট লাভের পরিমাণ হইতে শ্রমিকরা যাহা পায় ম্যানেজার পায় তার দ্বিগুণ এবং মালিক পায় ম্যানেজারের দ্বিগুণ। মালিক, ম্যানেজার, শ্রমিকদের মধ্যে লাভের টাকা শতকরা কে কত পাইবে ?

89. দুধে 3·5% এবং পোল্ট্রী ডিমে 13% প্রোটিন আছে। পোল্ট্রী ডিমের গড় ওজন 60 গ্রাম হইলে 70টি পোল্ট্রী ডিমে যে পরিমাণ প্রোটিন পাওয়া যাইবে কত দুধে সেই পরিমাণ প্রোটিন পাওয়া যাইবে ?

90. কোন শহরে বস্তিবাসীর সংখ্যা শহরের মোট জনসংখ্যার 12%। বস্তিবাসীদের 15% এবং ঐ শহরের অন্য অঞ্চলসমূহের অধিবাসীদের 36% চাকুরীজীবী হইলে অন্য অঞ্চলসমূহের চাকুরীজীবীর সংখ্যা ও বস্তিবাসী চাকুরীজীবী সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

91. প্রতি বৎসর কোন নদীর চরভূমি 5% করিয়া বাড়িয়া তিন বৎসরে 1·8522 হেক্টর হইলে প্রথমে চরভূমির ক্ষেত্রফল কত ছিল ?

92. A, B ও C একটি ব্যবসায়ে যথাক্রমে 4000, 3000 ও 5000 টাকা বিনিয়োগ করে। মোট মূলধনের উপর 4% সুদ এবং A-কে ব্যবসায় দেখাশোনা কাজের জন্য 300 টাকা দেওয়ার পর যদি লাভের 2100 টাকার অবশিষ্ট টাকা উহাদের মধ্যে যথাক্রমে 5 : 3 : 4 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে কে কত পাইবে ? [আই. পি. এস. '40]

93. এক ব্যক্তি একটি ঘোড়া ও গাড়ি 800 টাকায় বিক্রয় করিয়া দেখিল ঘোড়ায় 10% এবং গাড়িতে 20% লাভ হইয়াছে। ঘোড়ায় 15% এবং গাড়িতে 25% লাভ করিতে পারিলে সে আরও 35 টাকা বেশী পাইত। ঘোড়ার ও গাড়ির আসল মূল্য নির্ণয় কর। [আই. পি. এস. '40]

94. একটি ভোটকেন্দ্রে 4% লোক ভোটদানে বিরত থাকে। প্রার্থী দুইজনের মধ্যে যিনি মোট ভোটদাতাদের 52% ভোট পান তিনি তার প্রতিপক্ষ অপেক্ষা 500 ভোট বেশী পান। কতজন ভোটদাতা ভোট দান করিয়াছিলেন ? [বি. সি. এস. '52]

95. একটি নির্বাচনী প্রতিদ্বন্দ্বিতায় 10% ভোটদাতা ভোটদানে বিরত থাকে এবং প্রদত্ত ভোটের 60টি বেআইনী বলিয়া নাকচ হয়। বিজেতা প্রার্থী নির্বাচনী তালিকাভুক্ত ভোটদাতাদের 47% ভোট পাইয়া প্রতিপক্ষকে 308 ভোটে হারাইয়া দিলে নির্বাচনী তালিকাভুক্ত ভোটদাতাদের সংখ্যা এবং প্রার্থীদ্বয়ের প্রাপ্ত ভোটের সংখ্যা কত ছিল ? [বি. সি. এস্. '53]

96. যদি 1921 সাল হইতে প্রতি 10 বৎসর অন্তর কোন শহরের জনসংখ্যা ক্রমপর্যায়ে 10%, 15% ও 40% বাড়িয়া 1951 সালের লোক গণনায় 25,67,950 হয়, তাহা হইলে 1921 সালে ঐ শহরের জনসংখ্যা কত ছিল ? [বি. সি. এস্. '55]

97. এক ব্যবসায়ী 50 কিলোগ্রাম নিম্নমানের চায়ের সহিত কিলো গ্রা. প্রতি 8 আনা বেশী দামের 30 কিলোগ্রাম উচ্চমানের চা মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা 3 টাকা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করায় 20% লাভ হইল। উভয় প্রকার চায়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য কত ছিল ? [বি. সি. এস. '55]

98. কোন ফটোগ্রাফারের একটি ফটোর কপি প্রস্তুত করিতে ফটো প্লেট বাবদ 5 টাকা এবং প্রতি কপি ফটোর জন্য 1 টাকা 25 পয়সা খরচ পড়ে। প্রতি কপি 2 টাকা হিসাবে কত কপি ফটো বিক্রয় করিলে তাহার 20% লাভ হইবে ?

99. নিম্নের ছক হইতে দেহগ্রাহ্য প্রোটিনের হিসাবে কম হইতে বেশী দামের খাদ্যগুলিকে পরপর সাজাও :

খাদ্য	ওজন	দাম	প্রোটিনের পরিমাণ	দেহগ্রাহ্য প্রোটিন
দুধ	1 কেজি	3 টাকা	3·5%	82%
ডিম	50 গ্রাম 1টি	40 পয়সা	13·7%	98%
মাছ	1 কেজি	10 টাকা	17·3%	83%
মাংস	1 কেজি	12 টাকা	18·7%	80%

100. A 19% লোকসান দিয়া একটি বাড়ী Bকে 4860 টাকায় বিক্রয় করিল। B আবার উহা Cকে এমন মূল্যে বিক্রয় করিল যাহা পাইলে A-র 17% লাভ হইত। B শতকরা কত লাভ করিল ?

§ 3.3. আরও কয়েকটি ক্ষেত্রে শতকরা হিসাবের প্রয়োগ :

প্রাত্যহিক জীবনে ও বিভিন্ন প্রকার ব্যবসায়ে এই শতকরা হিসাব বিশেষ প্রয়োজন হইয়া থাকে। কোন ব্যবসায়ী প্রয়োজনমত কোন Bank হইতে নির্দিষ্ট শতকরা হারে সুদ দিয়া টাকা ধার করিয়া নির্দিষ্ট সময় অন্তে ঐ টাকা সুদ সমেত পরিশোধ করিয়া থাকে। কোন ব্যবসায়ী বিদেশ হইতে মাল আমদানি করিবার জন্য নির্দিষ্ট শতকরা হারে শুল্ক (Custom duty) দিয়া থাকে। প্রায় সময়েই প্রস্তুতকারী তাহার মাল বিক্রয়ের জন্য ক্রেতাকে দ্রব্যমূল্যের উপর কোন শতকরা হারে মূল্য ছাড় দিয়া থাকে, ইহার হিসাবে এবং কমিশন, ডিস্কাউণ্ট, দালালি, আয়কর প্রভৃতি নির্ণয়ে শতকরা হিসাবের প্রয়োজন হয়। এক্ষণে আরও কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা এইগুলি বুঝান হইতেছে।

উদা. 1. কোন ব্যবসায়ী কোন ব্যাঙ্কের নিকট হইতে বার্ষিক 9% সরল সুদে 20000 টাকা 4 বৎসরের জন্য ধার লইল। ঐ ধার পরিশোধ করিবার জন্য তাহাকে মোট কত টাকা দিতে হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 9 টাকা

∴ „ „ 4 „ „ = 9 টাকা × 4

∴ 20000 „ „ „ „ = 9 × 4 × 200 টাকা = 7200 টাকা।

অতএব, ব্যবসায়ীকে (20000 + 7200) বা 27200 টাকা দিয়া ঋণ পরিশোধ করিতে হইবে।

উদা. 2. তুমি মোট 3800 টাকা দিয়া একটি স্কুটার কিনিলে এবং 5% হারে ছাড় (discount) পাইয়াছ। ঐ ছাড় না পাইলে তোমাকে কত টাকা দিতে হইত ?

5% হারে ছাড় পাইলে 95 টাকা দিয়া 100 টাকা মূল্যের দ্রব্য পাওয়া যায়।

95 টাকা ছাড় মূল্য হইলে আসল মূল্য = 100 টাকা

∴ 1 „ „ „ „ „ „ = $\frac{100}{95}$ টাকা

3800 টাকা „ „ „ „ „ = $\frac{100}{95}$ টাকা × 3800

= 4000 টাকা।

অতএব, ছাড় (discount) না পাইলে তোমাকে 4000 টাকা দিতে হইত।

উদা. 3. তুমি একটি বাড়ী কিনিবার জন্য দালাল নিযুক্ত করিলে এবং বাড়ীর মূল্যের উপর 3% হারে দালালি দিবে বলিলে। যদি তুমি দালালিসমেত 37080 টাকা দিয়া বাড়ী কিনিয়া থাক, তবে উহার প্রকৃত মূল্য কত ?

দালালি সমেত মূল্য 103 টাকা হইলে প্রকৃত মূল্য = 100 টাকা

∴ „ „ 1 টাকা „ „ „ = $\frac{100}{103}$

∴ „ „ 37080 টাকা „ „ „ = $\frac{100 \times 37080}{103}$ টাকা

= 100 × 360 টা. = 36000 টাকা।

∴ বাড়ীটির প্রকৃত মূল্য = 36000 টাকা।

উদা. 4. এক ব্যক্তি তাহার মূলধন $89\frac{7}{8}$ টাকা দরের $3\frac{1}{2}$% স্টকে নিয়োজিত করিল। যদি ঐ স্টক কিনিতে $\frac{1}{8}$% দালালি দিয়া থাকে, তবে তাহার টাকায় শতকরা কত সুদ পাইবে ? [C. U. '45]

দালালি সমেত 100 টাকার স্টক কিনিতে লাগে $(89\frac{7}{8}+\frac{1}{8})$ বা 90 টাকা।

অতএব, 90 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=3\frac{1}{2}$ টাকা $=\frac{7}{2}$ টাকা

∴ 1 „ 1 „ „ $=\frac{7}{2\times90}$ টাকা

∴ 100 „ 1 „ „ $=\frac{7\times100}{2\times90}$ টাকা $=3\frac{8}{9}$ টাকা।

∴ নির্ণেয় সুদের হার = বার্ষিক $3\frac{8}{9}$%

প্রশ্নমালা 8

1. একব্যক্তি এক দফায় 15% কমিশনে 17000 টাকা দিয়া একটি মোটর গাড়ী কিনিতে পারে। যদি তাহাকে দুই দফায় প্রথমে 10% এবং পরে 5% হারে কমিশন দেওয়া হয়, তবে ঐ গাড়ীর জন্য কত টাকা দিতে হইবে ?

2. এক ব্যক্তি প্রথমে ব্যাঙ্কে সেভিংস এ্যাকাউন্টসে 1000 টাকা জমা দিল, প্রথম বৎসরান্তে 200 টাকা জমা দিল এবং দ্বিতীয় বৎসরান্তে টাকা তুলিয়া লইল। ঐ ব্যাঙ্ক বার্ষিক 6% সুদ দিলে সে কত টাকা পাইবে ?

3. বিদেশ হইতে কোন কোম্পানী এদেশের এক ব্যবসায়ীকে 500 টিন শিশুখাদ্য (baby food) পাঠাইল। প্রতি টিনে 4 কি. গ্রা. খাদ্য আছে এবং প্রতি কি. গ্রামের 10 টাকা মূল্য ধরিয়া বিল পাঠাইয়াছে। যদি ব্যবসায়ীকে এই মাল ছাড়ানোর জন্য 20% হারে শুল্ক দিতে হয়, তবে তাহার মোট কত টাকা ব্যয় হইবে ?

4. এক ব্যক্তি 2% ডিস্কাউন্টে মোট 6860 টাকা দিয়া একটি মোটর সাইকেল কিনিল। ঐ ডিস্কাউন্ট না পাইলে তাহাকে কত টাকা দিতে হইত ?

5. তুমি 3% দালালি দিবার অঙ্গীকারে তোমার মোটর গাড়ী বিক্রয়ের জন্য দালাল নিযুক্ত করিলে। যদি দালালি বাদে 19400 টাকা পাইয়া থাক, তবে উহার আসল মূল্য কত ছিল ?

6. কত টাকার 4% স্টক হইতে বার্ষিক 900 টাকা আয় হয় ?

7. আমার টাকা দিয়া বার্ষিক 4% আয় হয় এরূপ কিছু শেয়ার (share) কিনিলাম। যদি 100 টাকার শেয়ারের মূল্য $95\frac{7}{8}$ টাকা ও দালালি $\frac{1}{8}$% লাগিয়া থাকে ; তবে শতকরা কত হারে আমার আয় হইবে ?

8. এক ব্যক্তি 3% G. P. Notes 75 টাকা দরে বিক্রয় করিয়া সেই টাকায় 5% G. P. Notes কিনিল। ইহাতে যদি তাহার আয়ের কোন পরিবর্তন না হইয়া থাকে, তবে ঐ দ্বিতীয় G. P. Notes-এর মূল্য কত ? [C. U.]

9. কোন কারখানার এক শ্রমিক সপ্তাহের 42 ঘণ্টা কাজ করিয়া ঘণ্টায় 70 পয়সা হিসাবে মজুরী পায়। যদি তাহার সপ্তাহের মজুরী বৃদ্ধি পাইয়া 32 টাকা 34 পয়সা হয়, তবে তাহার মজুরী শতকরা কত বাড়িল ?

10. যদি কোন ব্যবসায়ী ক্রেতাকে 5% কমিশনে তাহার মাল বিক্রয় করিয়া 14% লাভ করিতে চায়, তবে তাহাকে মালের মূল্য শতকরা কত অধিক ধার্য করিতে হইবে ?

॥ বীজগণিত ॥

[Algebra]

নবম শ্রেণী

বীজগণিতের প্রক্রিয়াসমূহের চিহ্ন ও তাহাদের অর্থ :—

$+$ চিহ্ন : যোগ চিহ্ন ; $a+b$এর অর্থ a ও b সংখ্যা দুইটির যোগফল।

$-$ চিহ্ন : বিয়োগ চিহ্ন ; $a-b$এর অর্থ a হইতে bএর বিয়োগফল।

$\sim$ চিহ্ন : অন্তর চিহ্ন ; $a \sim b$এর অর্থ a ও bএর মধ্যে যেটি বৃহত্তর তাহা হইতে ক্ষুদ্রতরটির অন্তরফল।

$\times$ চিহ্ন : গুণ চিহ্ন ; $a \times b$এর অর্থ a ও bএর গুণফল।

[$a \times b$কে সাধারণতঃ ab লেখা হয়।]

[দ্রষ্টব্য : যেহেতু বীজগণিতের রাশিসমূহ নিয়ন্ত্রিত রাশি সেজন্য নিয়ন্ত্রিত রাশির গুণফল এখানে দেখান হইল।—

$(+a) \times (+b) = ab$

$(+a) \times (-b) = -ab$

$(-a) \times (-b) = ab$

$(-a) \times (+b) = -ab$]

$\div$ চিহ্ন : ভাগ চিহ্ন ; $a \div b$এর অর্থ aকে b দ্বারা ভাগ।

[$(a \div b)$কে সাধারণতঃ $\frac{a}{b}$ রূপে লেখা হয়।]

$=$ চিহ্ন : সমতার চিহ্ন ; $a=b$এর অর্থ a ও b সমান।

$\neq$ চিহ্ন : $a \neq b$এর অর্থ a ও b সমান নয়। ⎫

$>$ চিহ্ন : $a > b$এর অর্থ b অপেক্ষা a বৃহত্তর। ⎬ এইগুলি অসমতার চিহ্ন

$<$ চিহ্ন : $a < b$এর অর্থ b অপেক্ষা a ক্ষুদ্রতর। ⎭

$\nless$ চিহ্ন : $a \nless b$এর অর্থ b অপেক্ষা a ছোট নয়।

$\ngtr$ চিহ্ন : $a \ngtr b$এর অর্থ b অপেক্ষা a বড় নয়।

$\leqslant$ চিহ্ন : $a \leqslant b$এর অর্থ b অপেক্ষা a ক্ষুদ্রতর অথবা a ও b সমান, কিন্তু $a \ngtr b$.

$\geqslant$ চিহ্ন : $a \geqslant b$এর অর্থ b অপেক্ষা a বৃহত্তর অথবা a ও b সমান, কিন্তু $a \nless b$.

$\equiv$ চিহ্ন : $a \equiv b$এর অর্থ a ও b অভিন্ন।

$\sqrt{\ }$ চিহ্ন : ইহা মূলসূচক চিহ্ন ; [$\sqrt{a}$এর অর্থ aএর বর্গমূল, $\sqrt[৩]{a}$এর অর্থ aএর ঘনমূল, $\sqrt[৫]{a}$এর অর্থ aএর পঞ্চম মূল প্রভৃতি।]

বীজগণিত

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা
(Revision of previous work)

§ 1.1. বীজগণিত পাটীগণিতের সাধারণীকৃত গণিতশাস্ত্র। পাটীগণিতে পূর্ণসংখ্যা, ভগ্নাংশ বা দশমিক প্রভৃতি নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা দ্বারা গঠিত প্রশ্নসমূহ যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রভৃতি প্রক্রিয়া দ্বারা সমাধান করা হয়। বীজগণিতে কেবলমাত্র ঐ সমস্ত নির্দিষ্ট মানের সংখ্যাই ব্যবহৃত হয় না, পরন্তু a, b, c, x, y, z, α, β, γ প্রভৃতি বর্ণমালার অক্ষরসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যা-মানের প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়। গাণিতিক বিভিন্ন প্রক্রিয়াপ্রযুক্ত সংখ্যা বা সংখ্যাসমূহকে এবং একক-যুক্ত সংখ্যা বা সংখ্যাসমূহকে রাশি বলে। একক-যুক্ত সংখ্যাকে বদ্ধরাশি বলে। কিন্তু বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়া প্রযুক্ত হইলেও সংখ্যা বা সংখ্যার প্রতীক বিশুদ্ধ সংখ্যাই থাকে বলিয়া উহাদিগকে শুদ্ধরাশি বলে। সুতরাং পাটীগণিতে শুদ্ধ বা বদ্ধ উভয় প্রকার রাশি ব্যবহৃত হইলেও বীজগণিতের ক্ষেত্র অধিকতর ব্যাপক বলিয়া ইহাতে শুদ্ধ রাশিসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যার প্রতীক সম্বলিত এবং গাণিতিক প্রক্রিয়া প্রযুক্ত হইয়া বৈজিক রাশি (algebraic quantity) রূপে ব্যবহৃত হয়। বৈজিক রাশিসমূহ নিয়ন্ত্রিত রাশি, অর্থাৎ ইহারা ঋণাত্মক ও ধনাত্মক উভয় প্রকারই হইতে পারে। কিন্তু পাটীগণিতের রাশি সর্বদাই ধনাত্মক হয়। বৈজিক রাশি প্রশ্নাধীন শর্তসাপেক্ষে প্রতীকের যে নির্দিষ্ট মান বা মানসমূহ ধারণ করে তাহাকে বা তাহাদিগকে বৈজিক রাশির বীজ (root) বলে।

পাটীগণিতে $3+2=5$, ইহার অর্থ এই যে একটি নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা 3 এবং আরও একটি নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা 2, উভয়ের সমষ্টির মান হইল 5 ; কিন্তু বীজগণিতের $x+y=z$, এর অর্থ খুব ব্যাপক। কারণ x ও yকে দুইটি সংখ্যার প্রতীক ধরিলে ঐ দুইটি সংখ্যার সমষ্টি যাহা হইবে তাহার প্রতীক হইল z. এখন $z=5$ হইলে, x ও yএর মান যথাক্রমে 0 ও 5, 1 ও 4, 2 ও 3, 3 ও 2, 4 ও 1, 5 ও 0 এই সমস্ত সংখ্যাযুগলের যে কোন একটি হইতে পারে। কিন্তু x, y বা z-এর মান না জানা থাকিলে $x+y=z$ দ্বারা x ও y যে কোন দুইটি সংখ্যার সমষ্টি z বুঝাইবে। অতএব দেখা যাইতেছে পাটীগণিতের ক্ষেত্র সীমিত এবং বীজগণিতের ক্ষেত্র ব্যাপক। তাই পূর্বে বীজগণিতকে ব্যাপ্ত পাটীগণিত (Universal Arithmetic) বলা হইত।

একাধিক রাশির সমন্বয়ে গঠিত রাশিমালার প্রত্যেকটি রাশিকে ঐ রাশিমালার পদ (term) বলে। একটি মাত্র পদবিশিষ্ট রাশিকে একপদ রাশি (monomial), দুইটিমাত্র পদবিশিষ্ট রাশিমালাকে দ্বিপদ রাশিমালা (binomial), তিনটি পদযুক্ত হইলে উহাকে ত্রিপদ রাশিমালা (trinomial) এবং তিনের অধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালাকে বহুপদ রাশিমালা (polynomial) বলে।

§ **1.2.** বৈজিক রাশিতে প্রযুক্ত অখণ্ড সংখ্যাসমূহকে তিন ভাগে ভাগ করা যায়; ধনসংখ্যা, ঋণসংখ্যা ও শূন্য। 0 হইতে পর পর 1 যোগ করিয়া পর পর অখণ্ড ধনসংখ্যাগুলি পাওয়া যায় এবং 0 হইতে পর পর 1 বিয়োগ করিয়া পর পর অখণ্ড ঋণসংখ্যাগুলি পাওয়া যায়। সুতরাং অখণ্ড সংখ্যা অনন্ত, গুণিয়া শেষ করা যায় না। যে কোন দুইটি অখণ্ড সংখ্যার যোগফল একটি অখণ্ড সংখ্যা হয়। শূন্য ভিন্ন যে কোন দুইটি সংখ্যার গুণফল একটি অখণ্ড সংখ্যা, কিন্তু 0 ও অখণ্ড সংখ্যার গুণফল 0 হইবে। ভাগের ক্ষেত্রে a কোন একটি অখণ্ড সংখ্যা হইলে $\frac{0}{a}=0$ হয়, কিন্তু $\frac{a}{0}$ অর্থহীন। কারণ, যদি ভাগফল b ধরা হয়, তবে ভাগের সংজ্ঞানুসারে $a=0\times b$ হইবে···(1), কিন্তু $0\times a$ যে কোন সংখ্যা $=0$, সুতরাং $a=0$. $a=0$ না হইলে (1) সত্য হয় না। আবার $a=0$ হইলে 0কে 0 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যে কোন সংখ্যা হইতে পারে, সুতরাং এরূপ ভাগও অর্থহীন এবং ভাগফল অনির্দিষ্ট। যেহেতু $a+0=a$ হয়, সেজন্য 0কে যোগের তৎসম সংখ্যা (identity number) বলে এবং যেহেতু $a\times 1=a$ হয়, সেজন্য 1কে গুণের তৎসম সংখ্যা বলে।

অখণ্ড সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ এই মৌলিক প্রক্রিয়া চতুষ্টয়ের প্রথম তিনটি ক্ষেত্রে দুইটি দুইটি করিয়া সংখ্যার কাজ করা হয় বলিয়া প্রথম তিনটি প্রক্রিয়াকে দ্বিচর (Binary) প্রক্রিয়া বলে।

যোগ ও গুণের বেলায় অখণ্ড সংখ্যার স্থান বিনিময়ের নিয়মকে বিনিময় নিয়ম (Commutative Law) বলে। যথা,—

(i) $3+5=5+3$; (ii) $2\times 7=7\times 2$;

(iii) $a+b=b+a$; (iv) $a\times b=b\times a$.

যোগ ও গুণের বেলায় সংখ্যাগুলি পরস্পরের সাহচর্যে আসিয়া প্রয়োজনমত জোট বাঁধিবার নিয়মকে সাহচর্য নিয়ম (Associative Law) বলে। যথা—

(i) $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=b+(c+a)$

(ii) $abc=(a\times b)\times c=a\times(b\times c)=b\times(c\times a)$

গুণ্য সংখ্যা বা গুণক সংখ্যার একটিকে দুই বা ততোধিক ভাগে বিচ্ছিন্ন করিয়া গুণফল বাহির করিবার নিয়মকে বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive Law) বলে।

যথা,—

(i) $3(5+7)=3\times 5+3\times 7$; (ii) $a(b+c)=ab+ac$

বিচ্ছেদ নিয়ম গুণের ক্ষেত্রে সমান চিহ্নের উভয় দিক হইতেই প্রযোজ্য, কিন্তু ভাগের ক্ষেত্রে কেবলমাত্র ডানদিক হইতে প্রযোজ্য। যথা—

$(6+8)\div 2=6\div 2+8\div 2$; কিন্তু $6\div(8+2)\neq 6\div 8+6\div 2$.

$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$; কিন্তু, $a\div(b+c)\neq(a\div b)+(a\div c)$.

§ 1.3. সহগ (Coefficient) ও উৎপাদক (Factor)

3, a, bএর গুণফল হইল $3ab$; এখানে $3ab$এর উৎপাদক হইল 3, a ও b. এই গুণফল $3ab$-তে 3 হইল abএর সাংখ্য সহগ (numerical coefficient) এবং a হইল $3b$এর আক্ষরিক সহগ (literal coefficient) এবং b হইল $3a$-এর আক্ষরিক সহগ। যেহেতু $1\times a=a$. অতএব aএর সাংখ্য সহগ হইল 1 ; সুতরাং বৈজিক রাশিসমূহ সর্বদা সহগযুক্ত হয়।

§ 1.4. ঘাত ও সূচক (Power and Index)

3কে 3বার লইয়া গুণ করিলে হয় $3\times 3\times 3=3^3$. aকে 5 বার লইয়া গুণ করিলে পাই a^5. এখানে a হইল নিধান, 5 হইল সূচক এবং a^5 হইল aএর পঞ্চম ঘাত। শুধু a থাকিলে aএর ঘাত 1 বুঝায়। সূচক নিয়মানুসারে $a^m\times a^n=a^{m+n}$ হয় ; $a^m\times {}^n\times a^p=a^{m+n+p}$ হয়।

§ 1.5. মাত্রা (Dimension or Degree)

বীজগণিতের a^2b^3c রাশিটি 2টি a, 3টি b ও 1টি c পরস্পর গুণ করিয়া গঠিত, এই রাশিটির মাত্রা হইবে $2+3+1=6$, অতএব দেখা গেল কোন বীজগণিতীয় রাশির অক্ষরগুলির ঘাতসূচক সংখ্যাগুলি যোগ করিয়া যত হয় উহার তত মাত্রা হইবে। কোন রাশির সাংখ্য সহগকে উহার মাত্রা নির্ণয়ে ধরা হয় না ; সুতরাং $4a^2b$এর মাত্রা 3 হইবে। কোন রাশিমালার বিভিন্ন পদের বিভিন্ন মাত্রা থাকিলে সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট পদের মাত্রাই রাশিমালার মাত্রা হইবে। যথা,—$2a^3b^3c+3a^2b^2c^3+a^2b^3c^4$ রাশিমালার মাত্রা ইহার সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট পদ $a^2b^3c^4$এর মাত্রা অর্থাৎ 9 হইবে।

যখন কোন রাশিমালার প্রতি পদের মাত্রা সমান হয় তখন ঐ রাশিমালাকে সমমাত্র রাশি (Homogeneous expression) বলে। যথা, $a^2b+2ab^2+c^3$.

§ 1.6. পরম মান (Absolute Value)

কোন বৈজিক রাশির চিহ্নবিবর্জিত মানকে পরম মান বলে। যথা, +5 ও −5 উভয়েরই পরম মান 5

§ 2. বীজগণিতের একটি বৈশিষ্ট্য এই যে ইহাতে সূত্রাবলীর সাহায্যে সংক্ষেপে সমস্যার সমাধান করা যায়। পূর্বপাঠের পুনরালোচনা পর্যায়ে পরপৃষ্ঠায় সূত্রগুলি প্রয়োগ করা হইয়াছে।

[সূত্রাবলী]

1. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$;

অনুসিদ্ধান্ত : $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$

2. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$;

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$;

(ii) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$; (iii) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$

3. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca).$

(ii) $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

(iii) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$

4. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

অনুসিদ্ধান্ত : $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b).$

5. $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

অনুসিদ্ধান্ত : $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$

6. $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

8. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

9. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$;

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

10. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

এবং $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$

§ 3. সূত্রাবলীর প্রয়োগ

পাটীগণিতের নিয়মে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করার নিয়ম তোমরা জান। বীজগণিতে কোন কোন গুণ ও ভাগ formula-র সাহায্যে সহজে করা যায়। নিম্নে উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 1

1. $4a^2+6ab+9b^2$কে $2a-3b$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

$=(2a-3b)\{(2a)^2+2a.3b+(3b)^2\}$

$=(2a)^3-(3b)^3=8a^3-27b^3.$ [সূত্র দেখ]

2. $x+y, x-y, x^2+y^2$, ইহাদের ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ক্রমিক গুণফল $=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$=x^4-y^4$. [সূত্র 6 দেখ]

3. $a+b+c, \quad a+b-c, \ a-b+c, \ b+c-a$, ইহাদের ক্রমিক গুণফল কত ?

নির্ণেয় গুণফল $=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab)$

$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$

$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=4a^2b^2-a^4-b^4-c^4-2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$.

4. $a^3+b^3+c^3-3abc$কে $a+b+c$ দিয়া ভাগ কর।

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a+b+c)}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.

প্রশ্নমালা 1

1. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$কে $x+y+z$ দিয়া গুণ কর।
2. $1-x, 1+x, 1+x^2, 1+x^4$ ইহাদের ক্রমিক গুণফল কত ?
3. $a^2-ab+a+1$কে $a+b-1$ দিয়া গুণ কর। [C. U. 1917]
4. $a^2-ab+b^2, \ a^2+ab+b^2$ এবং $a^4-a^2b^2+b^4$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর। [P. U. '26
5. $a^2+b^2-ab+a+b+1$কে $a+b-1$ দিয়া গুণ কর। [D. B. '34
6. $1-a+2a^2-3a^4$কে $3a-5+2a^2$ দিয়া গুণ কর। [C. U. 1918]
7. ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর : $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$ [C. U. 1911, '26 ; D. B. 1932]
8. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$কে x^2+2x+5 দিয়া ভাগ কর। [D. B. 1924]
9. $x^4-y^4+a^4+2a^2x^2$কে $x^2-y^2+a^2$ দিয়া ভাগ কর।
10. $a^3+b^3-c^3+3abc$কে $a+b-c$ দ্বারা ভাগ কর। [C. U. '33]
11. a^6-b^6কে a^2-ab+b^2 দিয়া ভাগ কর। [D. B. 1922]

উদাহরণমালা 2

§ 4.1. সূত্র 1, 2, 3-এর প্রয়োগ :

উদাহরণ 1. যদি $x+y=5$ এবং $xy=6$ হয়, তবে $x-y$এর মান কত ?

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-4\times6=25-24=1,$$

$$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{1}=\pm1.$$

উদাহরণ 2. $a-b=4$ এবং $ab=21$; $a+b$এর মান নির্ণয় কর।

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=4^2+4.21=16+84=100.$$

$$\therefore\ a+b=\pm\sqrt{100}=\pm10.$$

উদাহরণ 3. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান কত হইবে ?

[C. U. 19313]

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}=(3)^2-2=9-2=7.$$

দ্বিতীয় প্রণালী : $\because\ x+\frac{1}{x}=3,\ \therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(3)^2$

বা, $x^2+\frac{1}{x^2}+2x.\frac{1}{x}=9,\quad\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=9-2=7.$

উদাহরণ 4. $2{\cdot}69\times2{\cdot}69+2{\cdot}62\times2{\cdot}69+1{\cdot}31\times1{\cdot}31$এর মান কত ?

প্রদত্ত রাশি$=(2{\cdot}69)^2+2\times1{\cdot}31\times2{\cdot}69+(1{\cdot}31)^2$

[$\because\ 2{\cdot}62=2\times1{\cdot}31$]

$=(2{\cdot}69+1{\cdot}31)^2=(4)^2=16.$

উদাহরণ 5. xyকে দুইটি বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর।

$\because\ x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$

এবং $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$

$$\therefore\ xy=\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(x-y)^2}{4}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

উদাহরণ 6. যদি $a=x+y,\ b=x-y,\ c=x+2y$ হয়,

তবে $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$এর মান কত ?

[C. U. '14 ; D. B. '31]

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

অনুসিদ্ধান্ত, সূত্র 3 দেখ

$=\frac{1}{2}\{(x+y-x+y)^2+(x-y-x-2y)^2+(x+2y-x-y)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(2y)^2+(-3y)^2+(y)^2\}=\frac{1}{2}(4y^2+9y^2+y^2)$

$=\frac{1}{2}\times14y^2=7y^2.$

প্রশ্নমালা 2

1. $x+y=3$ ও $xy=2$ হইলে, $(x-y)^2$এর মান কত ?
2. $a+b=8$ এবং $ab=15$ হইলে, a ও bএর মান কত হইবে ?
3. $a+b=5$ এবং $ab=6$ হইলে, a^2-b^2এর মান কত হয় ?
4. $x='29$ ও $y='14$ হইলে, $4x^2+9y^2+12xy$এর মান কত ?
5. $1'79\times1'79+2'42\times1'79+1'21\times1'21$এর মান কত ? [C. U. '30]
6. $0'75\times0'75+0'25\times0'25+2\times0'75\times0'25$কে সরল কর।
7. যদি $x+\frac{1}{x}=3$ হয়, তবে $x^2+\frac{1}{x^2}=$ কত ?
8. $a-\frac{1}{a}=4$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}$ এর মান কত ?
9. যদি $a+\frac{1}{a}=p$ হয়, তবে $a^2+\frac{1}{a^2}$কে p দ্বারা প্রকাশ কর।
10. $x+\frac{1}{x}=2$ হইলে, $x^4+\frac{1}{x^4}$এর মান কত ? [D. B. '36]
11. $a+b=5$ ও $ab=6$ হইলে, $a-b$এর মান কত ?
12. $x-y=3$ ও $xy=4$ হইলে, $x+y$এর মান কত ?
13. যদি $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ হয়, তবে দেখাও যে $x^2+\frac{1}{x^2}=0$
14. $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$ হইলে, $x^2-y^2+z^2+2xz$ এর মান কত হইবে ? [C. U. '22]
15. যদি $a^2+b^2+c^2=9$ এবং $ab+bc+ca=8$ হয়, তবে $a+b+c$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '24]
16. $x+y+z=13$ এবং $xy+yz+zx=50$ হইলে, $x^2+y^2+z^2$ এর মান কত ? [C. U. '11]
17. $x+y+z=9$ ও $x^2+y^2+z^2=31$ হইলে, $xy+yz+zx$এর মান নির্ণয় কর।
18. $x+y+z=2$ এবং $xy+yz+zx=1$ হইলে, $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$এর মান কত হইবে ? [C. U. '28]
19. abকে দুইটি বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর।
20. $x^2-y^2+2xz+2yz$কে দুইটি বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর।
21. দেখাও যে $(a+2b)(3a+2c)$ দুইটি পূর্ণবর্গের অন্তরফলের সমান।
22. $a^2+2ab-2bc-c^2$কে দুইটি বর্গরাশির অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর
23. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর। [D. B. '50]

24. যদি $x+\frac{1}{x}=5$ হয়, তবে $\frac{x}{x^2+x+1}$এর মান নির্ণয় কর।

[C. U. '48 Suppl.]

25. যদি $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$, $z=a+b-2c$ হয়, তবে $x^2+y^2-z^2+2xy$এর মান কত হইবে ? [C. U. '19]

26. $p-\frac{1}{p}=2$ হইলে, $p^4+\frac{1}{p^4}$ এর মান নির্ণয় কর। [B. U. '31]

27. $y=3+\frac{1}{p}$ হইলে প্রমাণ কর যে $p^4=119-\frac{1}{p^4}$. [B. U. '30]

§ 4.2. সূত্র 4 ও 5এর প্রয়োগ :

উদাহরণমালা 3

উদাহরণ 1. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$এর মান নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে : $x=19$ ও $y=-12$.

$$8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$
$$=(2x)^3+3.(2x)^2.3y+3.2x(3y)^2+(3y)^3$$
$$=(2x+3y)^3=(2\times19+3\times-12)^3=(38-36)^3=(2)^3=8.$$

উদা. 2. $a+b=3$ এবং $ab=2$ হইলে, a^3+b^3এর মান নির্ণয় কর।

[D. B. 1934]

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(3)^3-3\times2\times3=27-18=9.$$

উদা. 3. $a+b=4$ হইলে, a^3+b^3+12abএর মান কত ?

$\because\ a+b=4,\qquad \therefore\ (a+b)^3=4^3,$

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=64.$

বা, $a^3+b^3+3ab\times4=64,\qquad \therefore\ a^3+b^3+12ab=64.$

উদা. 4. যদি $x+y=a$, $x^2+y^2=b^2$ এবং $x^3+y^3=c^3$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+2c^3=3ab^2$ [C. U. 1943]

$$a^3+2c^3=(x+y)^3+2(x^3+y^3)$$
$$=x^3+y^3+3xy(x+y)+2(x^3+y^3)=3(x^3+y^3)+3xy(x+y)$$
$$=3(x+y)(x^2-xy+y^2)+3xy(x+y)\qquad\text{[সূত্র 7 দেখ]}$$
$$=3(x+y)(x^2-xy+y^2+xy)=3a(x^2+y^2)=3ab^2.$$

প্রশ্নমালা 3

1. যদি $a+\frac{1}{a}=5$ হয়, তবে $a^3+\frac{1}{a^3}$এর মান কত ?

2 $x-\frac{1}{x}=1$ হইলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$এর মান কত হইবে ?

3. $a+b=3$ হইলে দেখাও যে, $a^3+b^3+9ab=27$. [C.U. '27]
4. $x-y=3$ হইলে দেখাও যে, $x^3-y^3-9xy=27$.
5. $a+b=5$ এবং $ab=6$ হইলে a^3+b^3এর মান কত ?
6. যদি $x-y=5$ হয়, তবে x^3-y^3-15xy এর মান কত ?
7. যদি $x+\frac{1}{x}=p$ হয়, তবে $x^3+\frac{1}{x^3}$কে p দ্বারা প্রকাশ কর।
8. যদি $x-\frac{1}{x}=p$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p$.
9. $a+\frac{1}{a}=2$ হইলে $a^3+\frac{1}{a^3}$এর মান কত ?
10. যদি $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ হয়, তবে $x^3+\frac{1}{x^3}$এর মান কত ?
11. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হইলে প্রমাণ কর যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=0$. [C. U. '24]
12. $x+y=2$, $x^2+y^2=4$ হইলে x^3+y^3এর মান কত ?
13. $x+y=5$ ও $xy=6$ হইলে, $x^3+y^3+4(x-y)^3$এর মান নির্ণয় কর।
14. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে প্রমাণ কর যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$. [D. B. '29]
15. যদি $a+b=c$ হয়, তবে দেখাও যে $a^3+b^3+3abc=c^3$.
16. $x+\frac{1}{x}=2$ হইলে, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$এর মান নির্ণয় কর।
17. যদি $a-b=2$ এবং $ab=24$ হয়, তবে $(a^2+b^2)(a^3-b^3)$এর মান নির্ণয় কর।
18. যদি $x-y=8$, এবং $xy=65$ হয়, তবে $x^3-y^3-16(x-y)^2$ এর মান কত ?

§ 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Factorisation)

তোমরা বীজগণিতে কোন রাশিমালাকে উহার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার প্রণালী পূর্বেই শিখিয়াছ। এখানে সেই বিষয়ে পুনরালোচনা করা হইতেছে।

[সূত্র 6] তোমরা $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্র সংক্রান্ত উৎপাদক নির্ণয় শিখিয়াছ।

কোন কোন রাশিমালা দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশিত না থাকিলেও

অনেক সময় কিছু যোগ-বিয়োগ করিয়া উহাকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণ দ্বারা এই প্রক্রিয়া দেখান হইতেছে।

উদাহরণ 1. $a^4+a^2b^2+b^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

[a^2b^2 যোগ করায় পূর্ণবর্গরাশি হইল, পরে a^2b^2 বিয়োগ করায় রাশিটি ঠিক রহিল।]

উদা. 2. x^4+64কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$x^4+64=(x^2)^2+(8)^2+2.x^2.8-16x^2$$
$$=(x^2+8)^2-(4x)^2=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8).$$

উদা. 3. $x^4-10x^2y^2+16y^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$x^4-10x^2y^2+16y^2=(x^2)^2-2.x^2.5y^2+(5y^2)^2-(3y^2)^2$$
$$=(x^2-5y^2)^2-(3y^2)^2=(x^2-5y^2+3y^2)(x^2-5y^2-3y^2)$$
$$=(x^2-2y^2)(x^2-8y^2).$$

উদা. 4. $4x^2-3y^2-z^2-4xy+4yz$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=(4x^2-4xy+y^2)-(4y^2-4yz+z^2)$
$$=(2x-y)^2-(2y-z)^2=(2x-y+2y-z)(2x-y-2y+z)$$
$$=(2x+y-z)(2x-3y-z)$$

উদা. 5. $(x^2-y^2)(p^2-q^2)+4pqxy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=p^2x^2-p^2y^2-q^2x^2+q^2y^2+4pqxy$
$$=(p^2x^2+2pqxy+q^2y^2)-(p^2y^2-2pqxy+q^2x^2)$$
$$=(px+qy)^2-(py-qx)^2$$
$$=(px+qy+py-qx)(px+qy-py+qx).$$

প্রশ্নমালা 4

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. a^4+4 2. $4ax^4+81$ 3. $81x^4+64y^4$
4. $9x^4+36$ 5. x^4+x^2+1 [C. U. ; D. B.]
6. $a^4+a^2y^2+y^4$ 7. x^8+x^4+1 8. x^4-6x^2+1
9. $a^8+a^4x^4+x^8$ 10. p^4+2p^2+9 11. $x^4-23x^2y^2+y^4$
12. $4x^4y^4-16x^2y^2+9$ 13. $4x^4+625$

14. $9y^4-33y^2+16$
15. $9a^4-a^2+16$
16. $4x^4+11x^2+25$
17. $4x^4-24x^2+25$
18. $4x^4-16x^2+25$
19. $4a^4+1$
20. x^4+8x^2+144
21. $(a+b)^4+4$
22. $(x^2-2xy)-(z^2-2yz)$
23. $4a^2-9b^2-c^2-6bc$
24. $36x^2+y^2-z^2-12xy$
25. $4p^2-1+9q^2-25r^2+12pq-10r$
26. $16x^2-16y^2-9z^2-24x+24yz+9$
27. $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$
28. $4x^2-3y^2-z^2-4xy+4yz$
29. $4a^2-4ab-c^2-2bc$
30. $3a^2+b^2-c^2-4ab+2ac$.

§ 6. দুইটি ঘনরাশির সমষ্টি বা অন্তর

[সূত্র 7, 8]: $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$

$=(a^3+a^2b)-(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3)$

$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

এবং $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$

$=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

উদাহরণ 1. $81a^3b^3+3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$81a^3b^3+3=3(27a^3b^3+1)=3\{(3ab)^3+1^3\}$

$=3(3ab+1)(9a^2b^2-3ab+1)$.

উদা. 2. x^6-y^6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

উদা. 3. $(a+b)^3-c^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$(a+b)^3-c^3=(a+b-c)\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\}$

$=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc)$.

উদা. 4. $x^3+3x^2+3x-26$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=x^3+3.x^2.1+3.x.1^2+1^3-3^3=(x+1)^3-(3)^3$

$=(x+1-3)\{(x+1)^2+(x+1).3+3^2\}$

$=(x-2)(x^2+2x+1+3x+3+9)$

$=(x-2)(x^2+5x+13)$.

প্রশ্নমালা 5

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $8x^3+27$ 2. $8a^3-27$ 3. x^3+1 [C.U. '10]
4. x^3+64y^3 [C.U.'23] 5. a^3-8b^3 [C. U. '31]
6. $81x^3-24y^3$ 7. $a^3b^3-x^3y^3$ 8. $64p^3-125q^3$
9. x^4-x 10. $4x^3+108y^3$ 11. $64x^3-y^6$
12. $(x-y)^3-z^3$ 13. $(a+1)^3+(a-1)^3$
14. $(2x+3y)^3+(x-y)^3$ 15. a^6-b^6 16. $x^3-8(y-z)^3$
17. $x^3+6x^2+12x+9$ 18. $63a^3+6a^2-12a+8$
19. $a^3-9b^3+(a+b)^3$ 20. $8x^3-4x^2-2x+1.$

---

§ 7. x^2+px+q আকারের x-অক্ষরের দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

লক্ষ্য কর—(1) উক্ত রাশিটিতে x^2এর সহগ 1 (এক), x-এর সহগ $+p$ এবং x-নিরপেক্ষ পদ $+q$.

(2) আবার, $x^2+(a+b)x+ab$ রাশিমালাটিও x-অক্ষরের দ্বিমাত্রিক ; ইহার আকৃতি x^2+px+qএর অনুরূপ। $a+b=p$ এবং $ab=q$ হইলেই রাশিটি $=x^2+px+q$ হয়।

এখন, $x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)$
$$=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$$

এখন, x^2+px+qএর গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইলে যদি পরীক্ষা দ্বারা এরূপ দুইটি রাশি a ও b নির্ণয় করা যায় যে $a+b=p$ (অর্থাৎ xএর সহগ) এবং $ab=q$ (অর্থাৎ x-বর্জিত পদ) হয়, তবে রাশিটির $(x+a)$ এবং $(x+b)$ আকারের দুইটি উৎপাদক হইবে।

উদাহরণ 1. x^2-x-6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে -6এর উৎপাদক $(+6,-1), (-6,+1), (+3,-2),$ $(-3,+2)$; ইহাদের মধ্যে $(-3)+(+2)=-1$ (xএর সহগ) ; সুতরাং

রাশিটি $=x^2-3x+2x-6=(x^2-3x)+(2x-6)$
$$=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2).$$

উদা. 2. $(a+b)^2-2(a+b)-15$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a+b=x$ ধরিলে, রাশিটি $x^2-2x-15$ হয় ;

$\therefore$ রাশিটি $= x^2-2x-15 = x^2-5x+3x-15$

$= (x^2-5x)+(3x-15)$

$= x(x-5)+3(x-5) = (x-5)(x+3)$

$= (a+b-5)(a+b+3)$ [x-এর মান বসাইয়া]।

উদা. 3. x^4-13x^2-48কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে $x^2=y$ ধরিলে, রাশিটি $y^2-13y-48$ হয়।

স্থতরাং রাশিটি $= y^2-16y+3y-48 = (y^2-16y)+(3y-48)$

$= y(y-16)+3(y-16) = (y-16)(y+3)$

$= (x^2-16)(x^2+3)$ [y স্থলে x^2 বসাইয়া]

$= (x+4)(x-4)(x^2+3)$.

উদা. 4. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষন।

রাশিটি $= \{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-120$

$= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

$= (a+4)(a+6)-120$ [$x^2-5x=a$ ধরিয়া]

$= a^2+10a-96 = (a-6)(a+16)$

$= (x^2-5x-6)(x^2-5x+16)$ [a-এর মান বসাইয়া]।

$= (x+1)(x-6)(x^2-5x+16)$.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** এখানে বন্ধনী চারিটি একত্রে ক্রমিক গুণ না করিয়া দুই দুইটি বন্ধনী লইয়া গুণ করা হইয়াছে, কিন্তু যে কোন দুইটি বন্ধনী লওয়া হয় নাই। এমন দুই দুইটি বন্ধনী লইয়া দুই দল করিতে হইবে যেন প্রত্যেক দলের বন্ধনী-মধ্যস্থ রাশি দুইটির সমষ্টি দুইটি সমান হয়। ইহাও দেখ x^2+px+q আকারে পরিণত হইয়াছে।]

প্রশ্নমালা 6

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. x^2+x-20 2. $x^2-12x+20$ 3. $x^2-8x-20$
4. $x^2-19x-20$ 5. $1-5x-36x^2$ 6. $1+5x-36x^2$
7. $x^2-12x+36$ 8. $x^2-16x-36$ 9. x^2-x-72
10. $x^2-24x-81$ 11. $x^2-20x+91$ 12. $a^2-13a-90$
13. $x^2-x-132$ 14. $x^2-7x-144$ 15. $x^2-x-156$
16. $x^2-x-420$ 17. $x^2-10xy-39y^2$
18. $a^2b^2-abc-182c^2$ 19. a^4+4a^2-5

20. x^4+2x^2-3 21. x^4-10x^2+16

22. x^6-7x^3+12 23. a^6-7a^3-60

24. $a^6b^6-a^3b^3-6$ 25. a^8-a^4-2

26. $(a+b)^2-4(a+b)-12$ 27. $1-2(a-b)-15(a-b)^2$

28. $(x+y)^2-3(x^2-y^2)-10(x-y)^2$

29. $(x+y+z)^2-7(x+y+z)(y+z)-60(y+z)^2$

30. $(2a-3b)^2-(4a^2-9b^2)-2(2a+3b)^2$

31. $(x^2+2x)^2+12(x^2+2x)-45$

32. $(x^2-3x)^2-(x^2-3x)-2$ 33. $x^2+x-(a+1)(a+2)$

34. $x^2-2ax+(a+b)(a-b)$

35. $x^2+2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2$

36. $x^2-bx-(a+3b)(a+2b)$ 37. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$

38. $(a+b)^2-5a-5b+6$

39. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ [C. U. '14]

40. $x(x+3)(x+6)(x+9)+56$

41. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$

42. $(x^2+7x+4)(x^2+7x+6)-48$

43. $a(a+1)(a+2)(a+3)-15.$

---

§ 8. ax^2+bx+c আকৃতির দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

ax^2+bx+c আকারের রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে এমন দুইটি রাশি নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের গুণফল $=ac$ অর্থাৎ x^2-এর সহগ (a) ও x-বর্জিত পদের (c-র) গুণফল এবং যাহাদের বৈজিক সমষ্টি $=b$ অর্থাৎ x-এর সহগ হয়। উদাহরণ দ্বারা প্রক্রিয়াটি পরিস্ফুট করা হইতেছে।

উদাহরণ 1. $10x^2-x-11$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে $ac=10\times-11$, এবং $10-11=-1$ (xএর সহগ)।

$$\begin{aligned}10x^2-x-11&=10x^2+10x-11x-11\\&=(10x^2+10x)-(11x+11)\\&=10x(x+1)-11(x+1)\\&=(x+1)(10x-11).\end{aligned}$$

উদা. 2. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $(a-1)(a+1)=a^2-1$ এবং $(a^2-1)+1=a^2$.

$\therefore$ রাশিটি $=(a-1)x^2+\{(a^2-1)+1\}xy+(a+1)y^2$

$=\{(a-1)x^2+(a^2-1)xy\}+\{xy+(a+1)y^2\}$

$=(a-1)x\{x+(a+1)y\}+y\{x+(a+1)y\}$

$=\{x+(a+1)y\}\{(a-1)x+y\}$.

প্রশ্নমালা 7

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. $4a^2+11a+6$ 2. $4a^2-2a-6$ 3. $4a^2-10a-6$
4. $5x^2-x-4$ 5. $4x^2-x-5$ 6. $8p^2-10p-7$
7. $7p^2-15p+8$ 8. $7p^2-p-8$ 9. $3-13a+10a^2$
10. $3-a-10a^2$ 11. $42l^2-41lm-20m^2$
12. $18x^2+31xy-20y^2$ 13. $4(x^2-2x)^2+11(x^2-2x)+6$
14. $5(x^2-3x)^2+19(x^2-3x)-4$
15. $5(2x^2-x)^2-(2x^2-x)-4$
16. $3(a+b)^2+10(a^2-b^2)-25(a-b)^2$
17. $7(a^2+b^2)^2-15(a^4-b^4)+8(a^2-b^2)^2$
18. $ax^2+(a^2+1)x+a$ 19. $6(a+b)^2+5(a^2-b^2)-21(a-b)^2$
20. $(a-b)^2x^2+4abxy-(a+b)^2y^2$.

---

§ 9. **পরীক্ষা দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় (Factorisation by Trial) :** যদি xএর কোন অপেক্ষকে অর্থাৎ xযুক্ত রাশিমালার $x=a$ হইলে রাশিটির মান শূন্য হয়, তবে $x-a$ উহার একটি গুণনীয়ক হইবে।

উদাহরণ 1. $4x^3-9x^2+3x+2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য : রাশিটি ত্রিমাত্রিক ; সুতরাং, ইহার গুণনীয়ক এক মাত্রার তিনটি, অথবা এক মাত্রার একটি এবং দুই মাত্রার একটি হইবে।

এখন $x=1$ ধরিলে, রাশিটি $=4-9+3+2=0$;

$\therefore$ $x-1$ ঐ রাশিটির একটি গুণনীয়ক।

$x=-1$ ধরিলে, রাশিটি $=-4-9-3+2=0$ নহে ;

$\therefore$ $x+1$ ঐ রাশিটির গুণনীয়ক নহে।

এখন রাশিটিকে $x-1$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলটি আর একটি দ্বিমাত্রিক গুণনীয়ক হইবে। অর্থাৎ রাশিটি $=4x^2(x-1)-5x(x-1)-2(x-1)$

$$=(x-1)(4x^2-5x-2).$$

উদা. 2. x^3+3x^2+8x+6কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

6-এর উৎপাদক 1, 2, 3, 6 এবং −1, −2, −3, −6 ; সুতরাং পরীক্ষা এই কয়টি অঙ্কের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখিলেই চলিবে।

$x=1$ হইলে, রাশিটি $=1+3+8+6=18$, $\therefore$ $x-1$ গুণনীয়ক নহে।

$x=-1$ হইলে রাশিটি $=-1+3-8+6=0$, $\therefore$ $x+1$ গুণনীয়ক।

আর পরীক্ষার আবশ্যক নাই ; কারণ, রাশিটি ত্রিমাত্রিক ; $x+1$ একটি গুণনীয়ক, আর একটি গুণনীয়ক দ্বিমাত্রিক ; ইহা সহজবোধ্য।

রাশিটি $=x^2(x+1)+2x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2+2x+6)$.

[**দ্রষ্টব্য :** উদাহরণ 1 ও 2 হইতে বুঝা গেল যে, কোন রাশির সহগগুলির বৈজিক সমষ্টি শূন্য হইলে উহার গুণনীয়ক হইবে $x-1$, এবং সহগগুলির একান্তর সমষ্টি সমান হইলে উহার গুণনীয়ক হইবে $x+1$.]

প্রশ্নমালা 8

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. x^3+x^2+x+1
2. x^3-x^2+x-1
3. x^3+5x^2-2x-4
4. x^3+7x^2+7x+1
5. $x^3+4x^2+11x+8$
6. $2x^3+x^2-9x-9$
7. x^3-5x+4
8. $3a^3+2a+5$
9. $x^4+x^3-2x^2+2x+4$
10. $2x^4-3x^3-3x-2$
11. $5a^3+11a^2+4a-2$
12. a^3-6a+5
13. $12+4x-3x^2-x^3$
14. $4a^4+11a^3-47a^2-9a+5$.

---

§ 10. **সূত্র 9, 10 সংক্রান্ত গুণনীয়ক নির্ণয় :**

$a^3+b^3+c^3-3abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

যেহেতু $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}$$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

অনুসিদ্ধান্ত। $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$

উদাহরণ 1. $x^3+y^3-1+3xy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

যেহেতু $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$,

$\therefore \quad x^3+y^3-1+3xy=(x+y)^3-1-3xy(x+y)+3xy$
$=(x+y-1)\{(x+y)^2+(x+y).1+1^2\}-3xy(x+y-1)$
$=(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1-3xy)$
$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y).$

অথবা, সূত্রানুযায়ী রাশিটি $=(x)^3+(y)^3+(-1)^3-3\,(x)(y)(-1)$
$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y).$

উদা. 2. x^6+4x^3-1কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি $=(x^2)^3+(x)^3+(-1)^3-3.x^2.x(-1)$
$=(x^2+x-1)(x^4+x^2+1-x^3+x^2+x)$
$=(x^2+x-1)(x^4-x^3+2x^2+x+1).$

উদা. 3. যদি $x=y=333$ ও $z=334$ হয়, তবে
$x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান কত?

$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$
$=\frac{1}{2}(333+333+334)\{(333-333)^2$
$+(333-334)^2+(334-333)^2\}$
$=\frac{1}{2}\times 1000\times\{0+(-1)^2+(1)^2\}$
$=\frac{1}{2}\times 1000(1+1)=\frac{1}{2}\times 1000\times 2=1000.$

উদা. 4. যদি $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$
এবং $a^3+b^3+c^3=36$ হয়, তবে abcএর মান কত?

এখানে $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)$

$\therefore \quad 36=14+2(bc+ca+ab)$ [$\because \quad a+b+c=6$];

$\therefore \quad 2(bc+ca+ab)=36-14=22.$

$\therefore \quad bc+ca+ab=11.$

এক্ষণে, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore \quad 36-3abc=6\times(14-11)=18,$

$\therefore \quad 3abc=36-18=18,$

$\therefore \quad abc=6.$

প্রশ্নমালা 9

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $a^3-b^3-c^3-3abc$ 2. $8x^3-y^3+1+6xy$

3. $x^3+8y^3-1+6xy$ 4. $8a^3-27b^3-1-18ab$

5. a^6+5a^3+8 6. $8a^6+7a^3-1$

7. $(a-b)^3-(b-c)^3+(c-a)^3+3(a-b)(b-c)(c-a)$

8. $1+8x^3+18xy-27y^3$ 9. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

10. $(2x-y)^3-(x+y)^3+(2y-x)^3$.

11. $a+b+c=15$, $a^2+b^2+c^2=89$ এবং $abc=96$ হইলে, $a^3+b^3+c^3$এর মান নির্ণয় কর।

12. $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=5$ এবং $a^3+b^3+c^3=9$ হইলে, abcএর মান নির্ণয় কর।

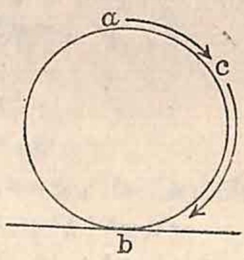
13. $a=225$, $b=226$, $c=227$ হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$এর মান নির্ণয় কর।

14. $x+y=z$ হইলে, $x^3+y^3-z^3+3xyz$এর মান কত ?

---

§ 11. চক্রক্রম রাশিমালা :

$\boldsymbol{bc+ca+ab}$ এই রাশিমালাটি লক্ষ্য কর। তিনটি পদের প্রথম অক্ষরটি যথাক্রমে b, c, a এবং দ্বিতীয় অক্ষরটি c, a, b. এখন মনে কর, একটি চাকার পরিধির উপর তিনটি অক্ষর a, b, c আছে; এবং b অক্ষরটি ভূমি-সংলগ্ন। তীর নির্দিষ্ট দিকে চাকাটি ঘুরাইলে bর পরে c, cর পরে a, aর পরে b. আবার bর পরে c ইত্যাদিক্রমে অক্ষরগুলি ঘুরিয়া ভূমি-সংলগ্ন হইবে। আরও লক্ষ্য কর, $bc+ca+ab$ রাশিটির অক্ষরগুলি চক্রক্রমে রাখিয়া যদি আরও লিখা যায়, তবে



পুনরায় $bc+ca+ab$ রাশিটিই ফিরিয়া আসিবে। এই অবস্থায় $bc+ca+ab$ রাশিটিতে a, b, c এই তিনটি অক্ষর চক্রক্রমে অবস্থিত (in cyclic order) বলা হয়। তিনটি অক্ষর a, b, cর চক্রক্রমে অবস্থিত এমন রাশিমালার উদাহরণ, $a+b+c$, $a^2bc+b^2ca+c^2ab$, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ইত্যাদি। আবার ইহাও লক্ষ্য করিবার বিষয় যে, এই রাশিমালার a স্থলে b, b স্থলে c, এবং c স্থলে a বসাইলে রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে।

§ 12. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

[**দ্রষ্টব্য :** রাশিটিতে a, b, c এই তিনটি অক্ষর চক্রক্রমে অবস্থিত। এইরূপ রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, প্রথমতঃ ইহাকে যে কোন একটি অক্ষর (a)এর ঘাত অনুসারে সাজাইতে হইবে ; ইহাতে b ও c যুক্ত একটি রাশি উৎপাদক বাহির হইবে ; দ্বিতীয়তঃ যাহা রহিল তাহাকে bএর ঘাত অনুসারে এবং পরে cএর ঘাত অনুসারে সাজাইলে রাশিটি সম্পূর্ণভাবে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট হইবে।]

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

[a-এর ঘাত অনুসারে সাজান হইল ; $b-c$ গুণনীয়ক বাহির হইল]

$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)\{a^2-ab-ac+bc\}$$
$$=(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}$$

[b-এর ঘাত অনুসারে সাজান হইল ; ইহাতে $c-a$ গুণনীয়ক বাহির হইল]

$$=(b-c)(c-a)(b-a)=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

[$\because b-a=-(a-b)$, সুতরাং প্রথমে '$-$' চিহ্ন দিয়া গুণনীয়কগুলিকে চক্রক্রমে রাখা হইল।]

দ্রষ্টব্য : যেহেতু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-[a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)],$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\ \text{অথবা},\ bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\end{array}\right\}=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

এবং $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(b-c)(c-a)(a-b)$

§ 13. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$\text{রাশিটি}=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$$
$$=(a^2b+a^2c)+(ab^2+ac^2+2abc)+(b^2c+c^2b)$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+ab+ac+bc\}$$
$$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b).$$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$;

সুতরাং প্রত্যেকটি $=(b+c)(c+a)(a+b)$.

§ 14. $(\boldsymbol{ab+bc+ca})(\boldsymbol{a+b+c})-\boldsymbol{abc}$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+ca^2+abc+c^2a-abc$

$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=(b+c)(c+a)(a+b)$. [অনু. 12 অনুসারে]

বিকল্প প্রণালী : মনে কর, $x=a+b+c$, তাহা হইলে

রাশিটি $=(ab+bc+ca)x-abc$

$=x^3-x^2.x+(ab+bc+ca)x-abc$

$=x^3-x^2(a+b+c)+(ab+bc+ca)x-abc$

$=(x-a)(x-b)(x-c)$

$=(a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)$

$=(b+c)(c+a)(a+b)$.

অনুসিদ্ধান্ত : যেহেতু $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$

$=(b+c)(c+a)(a+b)$,

$\therefore\ (b+c)(c+a)(a+b)+abc=(ab+bc+ca)(a+b+c)$.

§ 15. $\boldsymbol{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** a, b, c চক্রক্রমে অবস্থিত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী যাহা পূর্ববর্তী উদাহরণে উক্ত হইয়াছে, এই রাশিমালা সম্বন্ধে তাহার ব্যতিক্রম ; নিম্নের প্রণালী হইতে ইহা পরিস্ফুট হইবে।]

রাশিটি $=\{a^2(b+c)+abc\}+\{b^2(c+a)+abc\}+\{c^2(a+b)+abc\}$

$=a\{a(b+c)+bc\}+b\{b(c+a)+ac\}+c\{c(a+b)+ab\}$

$=a(ab+bc+ca)+b(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

[**দ্রষ্টব্য :** § 14. অনুচ্ছেদে অনুসিদ্ধান্ত হইতে বুঝা গেল

$(b+c)(c+a)(a+b)+abc=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$]

উদাহরণ 1. $(a+1)^2(b-c)+(b+1)^2(c-a)+(c+1)^2(a-b)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$\text{রাশিটি}=(a^2+2a+1)(b-c)+(b^2+2b+1)(c-a)+(c^2+2c+1)(a-b)$$

$$=\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+2\times 0+0$$

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

উদা. 2. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$\text{রাশিটি}=a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b$$

$$=(a^3b-a^3c)-(ab^3-ac^3)+(b^3c-bc^3)$$

$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$

$$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)(b-c)$$

$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$

$$=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}$$

$$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$$

$$=(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$$

$$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$$

$$=(b-c)(c-a)(b-a)(c+b+a)$$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

উদা. 3. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+a^3+b^3+c^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\text{রাশিটি}=\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc\}+(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=(a+b+c)(bc+ca+ab+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

§ 16. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{c})^3-\boldsymbol{a}^3-\boldsymbol{b}^3-\mathbf{c}^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\text{রাশিটি}=\{a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\}-a^3-b^3-c^3$$

$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

উদাহরণ 1. $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3$
$-(x+y-z)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

মনে কর, $y+z-x=a$, $z+x-y=b$, $x+y-z=c$;

তাহা হইলে $a+b+c=x+y+z$,

$b+c=2x$, $c+a=2y$ এবং $a+b=2z$.

$\therefore$ রাশিটি$=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$
$=3.2x.2y.2z=24xyz$.

উদা. 2. $(a+b)^3-(b+c)^3+(c+d)^3-(d+a)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

মনে কর, $b+c=x$, $-(c+d)=y$ এবং $d+a=z$,

$\therefore$ $x+y+z=b+c-c-d+d+a=a+b$;

$y+z=d+a-c-d=a-c$,

এবং $z+x=a+b+c+d$; $x+y=b-d$;

এখন প্রদত্ত রাশিটি$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$
$=3(y+z)(z+x)(x+y)$
$=3(a-c)(b-d)(a+b+c+d)$.

§ 17. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=4b^2c^2-(2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2+a^4+b^4+c^4)$
$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$
$=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$
$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$
$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$
$=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

প্রশ্নমালা 10

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.
2. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$.
3. $(x+a)(x+b)(a-b)+(x+b)(x+c)(b-c)$
$+(x+c)(x+a)(c-a)$.
4. $(pa^2+qa+r)(b-c)+(pb^2+qb+r)(c-a)$
$+(pc^2+qc+r)(a-b)$.

5. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$.

6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

7. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

8. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$.

9. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$.

10. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

11. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$.

12. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

13. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$.

14. $(b-c)(b+c-a)^2+(c-a)(c+a-b)^2+(a-b)(a+b-c)^2$.

15. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc+ab+bc+ca$.

16. $(y+z)(z+x)(x-y)+(z+x)(x+y)(y-z)$
$+(x+y)(y+z)(z-x)$.

17. $(x+y+z)(x^3+y^3+z^3+xyz)-x^4-y^4-z^4$.

18. $(a^2-b^2)(a+b)+(b^2-c^2)(b+c)+(c^2-a^2)(c+a)$.

19. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+8abc$.

20. $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)$
$+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$.

21. $x^2(b-c)+b^2(c-x)+c^2(x-b)$. [D. B. 1927]

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

(Highest Common Factor বা H. C. F.)

§ 18. মৌলিক গুণনীয়ক (Elementary Factor), সাধারণ গুণনীয়ক (Common factor), গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক কাহাকে বলে তাহা এবং প্রদত্ত রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার প্রণালী তোমরা পূর্ব-শ্রেণীতে শিখিয়াছ।

গ. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী :

(1) রাশিগুলিকে প্রথমতঃ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

(2) সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে সর্বোচ্চ শক্তি প্রদত্ত রাশিগুলিকে সম্পূর্ণভাবে ভাগ করে, তাহাদের গুণফলই গ. সা. গু. হইবে।

(3) রাশিগুলির সাংখ্য-সহগগুলির গ. সা. গু.-ই নির্ণেয় গ. সা. গু.-র সাংখ্য-সহগ হইবে।

উদাহরণ 1. $16a^2b^3x^4y^5$, $40a^3b^2x^3y^4$, $24a^5b^5x^6y^4$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

16, 40 ও 24এর গ. সা. গু.$=8$.

এখানে a, b, x, y সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক ; ইহাদের যে যে উচ্চতম শক্তি রাশিগুলিকে নিঃশেষে ভাগ করে, তাহারা হইতেছে a^2, b^2, x^3, y^4.

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=8a^2b^2x^3y^4$.

উদা. 2. x^3-5x^2+6x, x^3+4x^2-12x, x^3-9x^2+14xএর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি$=x(x^2-5x+6)=x(x-2)(x-3)$,

দ্বিতীয় রাশি$=x(x^2+4x-12)=x(x-2)(x+6)$,

তৃতীয় রাশি$=x(x^2-9x+14)=x(x-2)(x-7)$,

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু $=x(x-2)$.

প্রশ্নমালা 11

নিম্নরাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $3a^2b^3c^2, 6a^5b^3c^4, 18a^4b^3c^2$ 2. $a^2(b+c)^2, a^3(b+c)$
3. $3(a+b)^3(c+d)^2, 4(a+b)^2(c+d)^3$
4. $a^3-ab^2, ac-bc$
5. $(a^2-b^2)(b^2-c^2), (a^3-b^3)(b^3-c^3)$
6. $(a-b)^2(a+b)^2, a^2-b^2$
7. $(x^2-y^2), (x-y)^3$ এবং x^3-y^3
8. $3(x+y)^3, 6(x+y)^2, 9(x^2-y^2)$
9. $x^3-y^3, x^3-x^2y+xy^2-y^3$
10. $ax^2-(a+1)x+1, bx^2-(b-1)x-1$
11. $x^2-y^2, x^3-y^3, 3x^2-5xy+2y^2$
12. $x^2-2x-3, x^2+5x+4, x^2+7x+6$
13. $x^3-3x^2-10x, x^3+6x^2+8x, x^4-5x^3-14x^2$
14. $a^2+b^2-c^2+2ab, a^2-b^2-c^2+2bc$.

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

(Lowest Common Multiple বা L. C. M.)

§ 19. **গুণিতক** (Multiple), **সাধারণ গুণিতক** (Common multiple), **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** (Lowest Common multiple or L. C. M. অর্থাৎ ল. সা. গু.) কাহাকে বলে তাহা এবং উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া ল. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী তোমরা পূর্ব-শ্রেণীতে শিখিয়াছ।

§ 20. ল. সা. গু. নির্ণয় পদ্ধতি।

প্রত্যেক রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া, উক্ত উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটির যে মাত্রা রাশিগুলির মধ্যে সর্বোচ্চ তাহাদের গুণফলই রাশিগুলির ল. সা. গু. হইবে। সাংখ্য-সহগগুলির ল. সা. গু.-ই নির্ণেয় ল. সা. গু.-র সাংখ্য-সহগ হইবে।

উদাহরণ 1. $5x^3y^2z$, $10x^4y^3z^2$, $15y^3z$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5, 10, 15-এর ল. সা. গু. $= 30$. x^3, x^4-এর ল. সা. গু. $= x^4$;

y^2, y^3, y^3-এর ল. সা. গু. $= y^3$; z, z^2, z-এর ল. সা. গু. $= z^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 30 \times x^4 \times y^3 \times z^2 = 30x^4y^3z^2$.

উদা. 2. x^2-x-2, x^2+x-6 এবং x^2-2x+1-এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি $= x^2-2x+x-2 = x(x-2)+(x-2) = (x-2)(x+1)$,

দ্বিতীয় রাশি $= x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$,

তৃতীয় রাশি $= x^2-2x+1 = (x-1)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= (x-2)(x+1)(x+3)(x-1)^2$.

প্রশ্নমালা 12

নিম্নরাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $6a^2bc$, $8abc^2$
2. $15a^2c^2(a-c)$, $20ac(a-c)^2$
3. $(a-b)^2$, $(a+b)^2$, (a^3+b^3)
4. x^4-y^4, x^3-y^3, $(x-y)^3$
5. $(x+y)(y+z)$, $(y+z)(z+x)$, $(z+x)(x+y)$
6. $(x+1)(x+2)$, $(x+2)(x+3)$, $(x+3)(x+4)$
7. $ab-bx-ay+xy$ এবং $ab-bx+ay-xy$
8. x^6-y^6, $x^8+x^4y^4+y^8$
9. a^2-1, a^3-1, a^2+a-2
10. a^2-b^2, a^3-b^3, $3a^2-5ab+2b^2$
11. $x^2+(a-b)x-ab$, $x^2+(a+b)x+ab$
12. $a^2-b^2-c^2-2bc$, $b^2-c^2-a^2-2ca$
13. x^3+y^3, x^3-y^3, $x^4+x^2y^2+y^4$
14. $2a^2-5a+3$, $4a^2-4a-3$, $3a^2-a-2$
15. $3(x^2+xy)$, $8(xy-y^2)$, $5(x^2-y^2)$
16. x^2-3x+2, x^3-4x, $x^4+x^3-6x^2$ [C. U. '36]
17. x^3-3x^2+x-3, x^4+6x^2+5
18. $a^2-b^2-c^2+2bc$, $(a+b-c)^2$, $a^2+c^2-b^2+2ac$.[C.U.'40]

জটিল রাশিমালার গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.

§ **21.** যে সকল রাশিমালা সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাহাদের গ. সা. গু. পাটীগণিতের ন্যায় ভাগক্রিয়া দ্বারা নির্ণয় করিতে হয়।

নিয়ম ঃ দুইটি রাশির একটি দ্বারা অপরটিকে ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকিবে, তাহা দ্বারা প্রথম (ভাজক) রাশিকে আবার ভাগ করিতে হইবে ; এই ভাগক্রিয়ার যে ভাগশেষ থাকিবে তাহা দ্বারা প্রথম ভাগশেষকে ভাগ করিতে হইবে। এইরূপে অগ্রসর হইয়া যখন ভাগশেষ থাকিবে না তখন শেষ ভাগশেষ অর্থাৎ শেষ ভাজকটিই উভয় রাশির গ. সা. গু. হইবে।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** প্রতি ভাগক্রিয়ার ভাজক ও ভাজ্যকে মূলরাশির সাধারণ নয় এমন যে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ বা গুণ করা যাইতে পারে ; তাহাতে স্পষ্টতঃ গ. সা. গু.-র কোন পরিবর্তন হয় না।]

উদাহরণ 1. $x^3+7x^2+14x+8$ এবং $x^3+6x^2+11x+6$-এর গ. সা, গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে দুইটি রাশিই x-এর ঘাত অনুসারে সাজান আছে। মনে কর, প্রথমটি X এবং দ্বিতীয়টি Y ; এবং মনে কর Xকে Y দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ হয় R_1.

$$\begin{array}{r|l} \overset{(Y)}{x^3+6x^2+11x+6} & \overset{(X)}{x^3+7x^2+14x+8} \;(1 \\ & \underline{x^3+6x^2+11x+6} \\ & x^2+3x+2 \cdots (R_1) \end{array}$$

এখন X ও Y-এর গ. সা. গু. এবং Y ও R_1-এর গ. সা. গু. একই। এইবার Yকে R_1 দিয়া ভাগ করিলে পাই

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+2 & x^3+6x^2+11x+6 \;(x+3 \\ & \underline{x^3+3x^2+2x} \\ & \quad 3x^2+9x+6 \\ & \quad \underline{3x^2+9x+6} \end{array}$$

এখানে দেখা গেল (R_1) অর্থাৎ x^2+3x+2 হইল Yএর গুণনীয়ক ;

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. হইল x^2+3x+2.

উদা. 2. $3x^4+7x^3-14x^2-24x$ এবং $6x^4-10x^3-24x^2$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি $=x(3x^3+7x^2-14x-24)$

দ্বিতীয় রাশি $=2x^2(3x^2-5x-12)$

∴ উভয় রাশির গ. সা. গু.-র একটি গুণনীয়ক হইল $2x$ ও x^2-এর গ. সা. গু. $= x$. এখন বন্ধনীভুক্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r|r|r|l} x-3 & 3x^2-5x-12 & 3x^3+7x^2-14x-24 & x+4 \\ & 3x^2+4x & 3x^3-5x^2-12x & \\ \hline & -9x-12 & 12x^2-\ \ 2x-24 & \\ & -9x-12 & 12x^2-20x-48 & \\ \hline & & 6 \mid 18x+24 & \\ & & 3x+\ 4 & \end{array}$$

এই রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $3x+4$.

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x(3x+4)$.

উদা. 3. $2x^3-10x^2+20x-16$ এবং $3x^3-12x^2+21x-18$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম রাশিকে 3 দ্বারা ও দ্বিতীয় রাশিকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া ভাগক্রিয়া করিতে হইবে ; ইহাতে ভাগফলে বা ভাগশেষে ভগ্নাংশ সাংখ্য-সহগ থাকিবে না ; আবার যেহেতু, 2 বা 3 কোন রাশিরই গুণনীয়ক নহে, সেজন্য ইহাদের গ. সা. গু. অপরিবর্তিতই থাকিবে।

প্রথম রাশি $\times 3 = 6x^3-30x^2+60x-48$

দ্বিতীয় রাশি $\times 2 = 6x^3-24x^2+42x-36$

$$\begin{array}{r|l|l} 6x^3-30x^2+60x-48 & 6x^3-24x^2+42x-36 & 1 \\ & 6x^3-30x^2+60x-48 & \\ \hline & 6 \mid \ 6x^2-18x+12 & \\ & \quad x^2-3x+2 \cdots (\mathrm{R}_1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} x^2-3x+2 & 6x^3-30x^2+60x-48 & 6x-12 \\ & 6x^3-18x^2+12x & \\ \hline & -12x^2+48x-48 & \\ & -12x^2+36x-24 & \\ \hline & 12 \mid 12x-24 & \\ & \quad x-\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} x-2 & x^2-3x+2 & x-1 \\ & x^2-2x & \\ \hline & -x+2 & \\ & -x+2 & \\ \hline \end{array}$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x-2$.

§ 22. তিন বা ততোধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয়।

নিয়ম : যে কোন দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; এই গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; এইরূপে অগ্রসর হইয়া শেষ রাশির

সহিত পূর্ববর্তী সমস্ত রাশির গ. সা. গু.-টির যে গ. সা. গু. পাইবে তাহাই প্রদত্ত সকল রাশির গ. সা. গু. হইবে। নিম্নে উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 4. $2x^3+7x^2-5x-4$, $x^3+8x^2+11x-20$ এবং $2x^3+19x^2+49x+20$, ইহাদের গ. সা. গু. কত?

প্রথমে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে ;

$$\begin{array}{r|l|l}
x^3+8x^2+11x-20 & 2x^3+7x^2-5x-4 & 2 \\
 & 2x^3+16x^2+22x+40 & \\
\hline
-9 & -9x^2-27x+36 & \\
\hline
 & x^2+3x-4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2+3x-4 & x^3+8x^2+11x-20 & x+5 \\
 & x^3+3x^2-4x & \\
\hline
 & 5x^2+15x-20 & \\
 & 5x^2+15x-20 & \\
\hline
\end{array}$$

∴ প্রথম দুইটি রাশির গ. সা. গু. হইল x^2+3x-4.

এখন, এই গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে যাহা হইবে তাহাই তিনটি রাশির গ. সা. গু. হইবে।

$$\begin{array}{r|l|l|l}
x-1 & x^2+3x-4 & 2x^3+19x^2+49x+20 & 2x+13 \\
 & x^2+4x & 2x^3+6x^2-8x & \\
\hline
 & -x-4 & 13x^2+57x+20 & \\
 & -x-4 & 13x^2+39x-52 & \\
\hline
 & & 18 \mid 18x+72 & \\
 & & x+4 &
\end{array}$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+4$.

প্রশ্নমালা 13

নিম্নরাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $2x^3+x^2-5x-3$ এবং $8x^3+6x^2-21x-18$. [C. U. 1913]
2. x^2-2x-3 ও x^3-2x^2-2x-3. [C. U. 1915]
3. $3x^2-11x-4$ ও $6x^3-25x^2+3$. [C. U. 1916]
4. $2x^3-7x^2-46x-21$ ও $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$. [C. U. 1920 ; D. B. 1927]
5. $x^3+6x^2+2x-15$ ও $x^3+5x^2-2x-10$. [C. U. 1923]
6. x^3-3x-2 এবং x^3-4x^2+6x-4. [C. U. 1924]
7. x^2-x-2, x^3+1 এবং $(x+1)^2$. [C. U. 1926]
8. $x^4+2x^3+3x^2+11x+10$ ও $x^5+2x^3+5x^2-3x-5$. [C. U. 1934]

9. $x^3+6x^2+11x+6$ ও $x^3+8x^2+19x+12$. [C. U. 1948]

10. $2b^2+ab-a^2$ এবং $a^3-a^2b-4ab^2+4b^3$. [C. U. 1936]

11. $2x^3-3x^2-17x-12$ ও $3x^3-7x^2-18x-8$. [C. U. 1937 ; D. B. 1935]

12. $2x^2+18x+28$ ও $x^3+10x^2+24x+16$. [C. U. 1933]

13. $2x^4-6x+40$ ও $15x^4-9x^3+192$. [C. U. 1939]

14. x^5-x^2-4x-2 ও $x^5+3x^4-x^3-7x^2-5x-1$. [C. U. 1942]

15. x^3+4x^2+4x+3 এবং $x^3+8x^2+21x+18$. [C. U. 1943]

16. x^3+3x^2-9x+5 এবং $x^3-19x+30$. [C. U. 1944]

17. $2x^2-x-1$ এবং $3x^3-7x^2+4$. [C. U. 1945]

18. $2x^5-10x^3-4x^2$ এবং $6x^4-15x^3+3x$.

19. a^3+4a^2+4a+1, $a^4+3a^3+2a^2+3a+1$ এবং a^3+5a^2+7a+2.

20. x^4-5x^2+4 ও $x^5-11x+10$. [D. B. 1932]

21. x^3-3x-2 ও x^3-4x^2+6x-4. [D. B. 1934]

22. $2x^5-11x^2-9$ ও $4x^5+11x^4+81$. [D. B. 1936]

23. $3x^3-13x^2+23x-21$ ও $6x^3+x^2-44x+21$. [D. B. 1939]

24. x^3-3x^2+4x-2 ও x^3+2x^2-4x+1. [D. B. 1940]

25. a^3-1 এবং a^7-1. [D. B. 1941]

26. $3x^3-5x^2+5x-2$ ও $2x^4-2x^3+3x^2-x+1$ [P. U. 1930]

27. $4x^4-12x^2-8x$ এবং $6x^4-24x^3+30x^2-12x$.

28. যদি bx^2+cx+d ও $b_1x^2+c_1x+d$এর গ. সা. গু. $x-a$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a(b-b_1)=c_1-c$.

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

§ 23. পূর্বে বলা হইয়াছে যে, দুই বা ততোধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রত্যেক রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় করিয়া যত প্রকারের উৎপাদক হইল (তাহা সকলের সাধারণ উৎপাদক হউক বা না হউক) সেইগুলির গুণফল ল. সা. গু. হইবে। যদি একই রকমের উৎপাদকের বিভিন্ন ঘাত (power) থাকে, তবে কেবল বৃহত্তম ঘাতটি লইতে হইবে।

§ 24. গ. সা. গু.-এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়।

যদি রাশিগুলিকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না যায়, তবে গ. সা. গু.-র সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় করিবে।

মনে কর, X ও Y দুইটি রাশির গ. সা. গু. H এবং X ও Yকে H দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যথাক্রমে q ও p হয়। এখানে অবশ্যই q ও p-এর কোন সাধারণ উৎপাদক থাকিতে পারে না।

$$\therefore \quad X = qH \text{ এবং } Y = pH.$$

$$\therefore \quad X \text{ ও } Y\text{-এর ল. সা. গু.} = q \times p \times H = \frac{qH \times pH}{H} = \frac{X.Y}{H}$$

$$= \frac{X}{H}.Y. \quad \text{বা}, \quad \frac{Y}{H}.X.$$

অতএব, দেখা গেল যে, দুইটি রাশির গুণফল উহাদের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

$\therefore$ ল. সা. গু. নির্ণয়ের একটি নিয়ম হইল :—

প্রথমে দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া ঐ গ. সা. গু. দ্বারা উহাদের একটি রাশিকে ভাগ করিবে এবং ঐ ভাগফলকে অন্য রাশি দ্বারা গুণ করিয়া যে গুণফল পাইবে তাহাই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে। যদি তিনটি রাশি থাকে, তবে প্রথমে দুইটি রাশির ঐরূপে ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া পরে ঐ ল. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির ঐ ভাবে আবার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

উদাহরণ : $x^3 - 16x + 24$ ও $2x^3 - 5x^2 + 4$-এর ল. সা. গু. কত?

[C. U. 1933]

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 16x + 24 & 2x^3 - 5x^2 \quad + 4 \;(2 \\
 & 2x^3 \quad - 32x + 48 \\
\hline
- & -5x^2 + 32x - 44 \\
\hline
 & 5x^2 - 32x + 44 \;)\; x^3 \quad - 16x + 24 \;(\\
 & \times 5 \\
\hline
 & 5x^3 \quad - 80x + 120 \;(x \\
 & 5x^3 - 32x^2 + 44x \\
\hline
 & 32x^2 - 124x + 120 \\
 & \times 5 \\
\hline
 & 160x^2 - 620x + 600 \;(32 \\
 & 160x^2 - 1024x + 1408 \\
\hline
404 & 404x - 808 \\
\hline
 & x - 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x-2 & 5x^2-32x+44 \;(5x-22 \\ & 5x^2-10x \\ \hline & -22x+44 \\ & -22x+44 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ গ. সা. গু. $= x-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= \dfrac{(x^3-16x+24)(2x^3-5x^2+4)}{(x-2)}$

$= (x^2+2x-12)(2x^3-5x^2+4)$.

প্রশ্নমালা 14

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. x^2-4, x^2-x-2 ও x^2+x-2. [C. U. 1910]
2. $2x^2-x-1$, $2x^2+3x+1$ ও x^2-1. [C. U. 1912]
3. $x^2-(a-c)x-ac$ ও $x^2-(a+c)x+ac$. [C. U. 1928]
4. x^2-3x+2, x^2-4x+3 এবং x^2-5x+6. [C. U. 1922 ; D. B. 1929]
5. a^2+6a+8, a^2+5a+6 ও a^3+4a^2+4a+3. [C. U. '34]
6. $x^2-12x+35$, x^2-8x+7 ও x^3-5x^2-x+5. [C. U. '35]
7. x^2-3x+2, x^3-4x এবং $x^4+x^3-6x^2$. [C. U. '36]
8. a^2-3a+2, $(a-1)^2$ এবং a^4-1. [C. U. '38]
9. $a^2-b^2-c^2+2bc$, $(a+b-c)^2$, $a^2-b^2+c^2+2ac$. [C. U. '40]
10. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ ও $7x^2-5x-6$. [D. B. '26]
11. $4x^2+8x-12$, $9x^2-9x-54$ এবং $6x^4-30x^2+24$. [D. B. '39]
12. $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ ও $2x^2+3x-2$. [C. U. '26]
13. $x^2(x^2-4)$ এবং $x^4+2x^3-8x^2$. [W. B. S. F. '52]
14. $x-2$, x^2+2 এবং x^2+x+1.
15. দুইটি রাশির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. যথাক্রমে $x+1$ ও $x^3+6x^2+11x+6$ এবং একটি রাশি x^2+3x+2 হইলে অপর রাশিটি নির্ণয় কর।
16. x ও y বীজগণিতীয় রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. যথাক্রমে h ও l. যদি $h+l=x+y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$. [P. U.]

§ 25. a ও b-র যে কোন মানেই $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ। ইহার aকে লব (numerator) এবং bকে হর (denominator) বলে।

(a) ভগ্নাংশের লব ও হরের সাধারণ কোন গুণনীয়ক না থাকিলে ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠ আকার হয়। সুতরাং কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইলে ইহার লব ও হরকে উভয়ের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিতে হয়। যথা— $\frac{ma}{mb}=\frac{ma\div m}{mb\div m}=\frac{a}{b}$.

(b) বীজগণিতে **ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগের** প্রণালী পাটীগণিতের যোগ ও বিয়োগের প্রণালীর অনুরূপ। প্রথমতঃ ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হয়। এই ল. সা. গু. প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের হর হইবে। তারপর এই গ. সা. গু.-কে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল দ্বারা লবকে গুণ করা হয়। যথা—

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}-\frac{c}{d}=\frac{acd}{bcd}+\frac{b^2d}{bcd}-\frac{bc^2}{bcd}\qquad\left[\because\ \frac{a}{b}=\frac{a\times cd}{bcd}=\frac{acd}{bcd},\ \frac{b}{c}=\frac{b\times bd}{bcd}=\frac{b^2d}{bcd},\ \frac{c}{d}=\frac{c\times bc}{bcd}=\frac{bc^2}{bcd}\right]$$

$$=\frac{acd+b^2d-bc^2}{bcd}.$$

(c) পাটীগণিতে ও বীজগণিতে **ভগ্নাংশের গুণন** প্রক্রিয়া একই প্রকার। দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের গুণফল হইবে একটি ভগ্নাংশ যাহার লব হইবে উক্ত ভগ্নাংশগুলির লবগুলির গুণফল এবং হর হইবে হরগুলির গুণফল।

$$\frac{a}{b}\times\frac{b^2}{c}\times\frac{c^2}{d}=\frac{a\times b^2\times c^2}{b\times c\times d}=\frac{a\times b\times c}{d}=\frac{abc}{d}.$$

গুণফল সর্বদাই লঘিষ্ঠ আকারে রাখিতে হইবে।

(d) কোন ভগ্নাংশকে অপর একটি **ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ** করিতে হইলে প্রথম ভগ্নাংশকে দ্বিতীয় ভগ্নাংশটির অন্যোন্যক দ্বারা গুণ করিতে হয়। যথা—

$$\frac{ac}{bd}\div\frac{bc}{ad}=\frac{ac}{bd}\times\frac{ad}{bc}=\frac{a^2cd}{b^2cd}=\frac{a^2}{b^2}.$$

গুণফলের ন্যায় ভাগফলও সর্বদাই লঘিষ্ঠ আকারে রাখিতে হইবে।

উদাহরণ। $\left(a-\frac{1}{4a}\right)\div\left(1+\frac{1}{2a}\right)=\frac{4a^2-1}{4a}\div\frac{2a+1}{2a}$

$$=\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a}\times\frac{2a}{2a+1}=\frac{2a-1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 15

সরল কর :—

1. $\frac{a}{b^2c^2}\times\frac{bc^3}{ax^3}\times\frac{b^4y^3}{ac}\times\frac{x^3}{b^3y^3}$ 2. $\frac{3l^2m^2}{10p^2q^2}\div\frac{12lq}{5mp}\times\frac{4qp^4}{9lm^5}$

3. $\left(\frac{8}{a}+\frac{a}{4}-3\right)\div\left(\frac{a}{12}-\frac{1}{3}-\frac{8}{3a}\right)$ 4. $\left(x-\frac{1}{9x}\right)\div\left(1+\frac{1}{3x}\right)$

5. $\left(3a-\frac{1}{3a}\right)\div\left(3a-2+\frac{1}{3a}\right)$ 6. $\frac{a+1}{a-1}\times\frac{a^2+a-2}{a^2+a}$

7. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab}\times\frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$ 8. $\left(\frac{1-x^2}{1+y}\right)\left(\frac{1-y^2}{x+x^2}\right)\left(1+\frac{x}{1-x}\right)$

9. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\frac{x-y}{x^2+xy}$

10. $\frac{x^2-9y^2}{x^2+5xy+6y^2}\div\frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-y^2}$

11. $\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}-3xy\right)$ [A. U.]

12. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$

13. $\left\{1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right\}\div\left\{\frac{x^3-y^3}{3(x-y)}-xy\right\}$

14. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\times\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

15. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a(a+b)}\div\frac{a^2+b^2}{a^2}$

16. $\frac{2a^2+5a+3}{a^2-3a+2}\div\frac{6a^2+a-12}{3a^2-10a+8}$

17. $\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}\right)\div\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}\right)$

18. $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$ [C. U.]

19. $\left\{\frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{\frac{a}{x}-\frac{b}{y}}\div\frac{\frac{x}{b}+\frac{a}{y}}{\frac{b}{x}+\frac{y}{a}}\right\}+\left(\frac{a}{y}-\frac{y}{a}\right)$ 20. $\frac{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\times\frac{2x}{x+\frac{1}{x}}\div\frac{1}{x}$

21. $\left(\dfrac{a^2}{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}-b}+\dfrac{b^2}{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}-a}\right)\times\dfrac{1}{a+b}$

22. $\left\{2-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right\}\div\left\{2+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right\}$

23. $\left\{\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-1\right\}\div\left\{\dfrac{(a-b)^2}{4ab}+1\right\}\times\dfrac{a+b}{a-b}$

24. $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\times\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

25. $\left\{a+\dfrac{b^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{a-b}\right\}\div\left\{\dfrac{1}{b(a-b)}-\dfrac{1}{b(a+b)}-\dfrac{1}{a^2}\right\}$

26. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}\div\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b-a}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}.$ [C. U. '34]

§ 26. ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fraction)

ক্রমিক বা অবিরত ভগ্নাংশ কাহাকে বলে তাহা তোমরা পাটীগণিতে শিখিয়াছ। পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতীয় ক্রমিক ভগ্নাংশ সরল করিবার সময়ও উহার সর্বনিম্ন অংশ হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে সরল করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণ দেখ।

উদাহরণ। $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}}$ কে সরল কর। [C. U. '36, '48, '49]

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ}=\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}}}=\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x^3-x+x}{x^2-1}}}$$

$$=\frac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x^3}{x^2-1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{x^2-1}{x^3}}=\frac{1}{\dfrac{x^4-x^2+1}{x^3}}=\frac{x^3}{x^4-x^2+1}.$$

চক্রক্রম হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ :

§ 27. চক্রক্রমের রাশিমালাকে সরল করিবার সময় প্রথমে হরগুলিকে চক্রক্রমে সাজাইয়া লইবে। $(a-b)(b-c)(c-a)$ ইহাই চক্রক্রম। কোন ভগ্নাংশের হরে যদি $a-c$ থাকে, তবে উহা চক্রক্রমের সহিত মিলে নাই বলিয়া উহাকে $-(c-a)$ এইভাবে লিখিয়া লইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ। নিম্নের সূত্রগুলি মনে রাখিবে। ঐগুলি চক্রক্রমের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ে প্রমাণ করা হইয়াছে :—

(1) $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

(2) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(5) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$

(6) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(7) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

নিম্নের ভগ্নাংশগুলি সরল কর :

উদাহরণ 1. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}.$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{-(a-b)(b-c)}+\dfrac{c}{-(c-a)(b-c)}$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

উদা. 2. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$

[D.B. 1932, 1948 ; A. U. 1925]

$$=\frac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{-(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

উদা. 3. $\dfrac{1}{bc(b-a)(c-a)}+\dfrac{1}{ca(c-b)(a-b)}+\dfrac{1}{ab(a-c)(b-c)}$

$$=\frac{1}{-bc(a-b)(c-a)}+\frac{1}{-ca(b-c)(a-b)}+\frac{1}{-ab(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

উদা. 4. $\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c-a)^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}+3.$

[C. U. '39]

প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{(b-c)^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{(c-a)^2}{-(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{-(c-a)(b-c)}+3$$

$$=\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}+3=\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}+3$$

$[\because\ (b-c)+(c-a)+(a-b)=0]$

$$=-3+3=0.$$

উদা. 5. $\dfrac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\dfrac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$
$+\dfrac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2).$

প্রদত্ত রাশি $=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)$
$+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)$

$$=\frac{1}{c}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{c}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{b}(b^2+c^2-a^2)$$
$$+\frac{1}{b}(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{a}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{a}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{b}(b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2)$$
$$+\frac{1}{a}(c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}\times 2c^2+\frac{1}{b}\times 2b^2+\frac{1}{a}\times 2a^2=2c+2b+2a=2(a+b+c).$$

[দ্রষ্টব্য : $\dfrac{b+c}{bc}$কে$\left(\dfrac{b}{bc}+\dfrac{c}{bc}\right)$ লেখা যায়। উহাকে আবার $\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$ লেখা যায়। এইভাবে তিনটি পদকে লেখা হইয়াছে। $\frac{1}{c}$-এর সহিত যে দুইটি স্থানে গুণ আছে সেই দুইটি গুণফল একস্থানে পর পর রাখা হইয়াছে। এইভাবে বাকিগুলিও লেখা হইয়াছে।]

উদা. 6. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-c}+\dfrac{c}{c-a}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{b+c}{b-c}+\dfrac{c+a}{c-a}+3}.$

প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের রাশিমালা

$$=\frac{a+b}{a-b}+1+\frac{b+c}{b-c}+1+\frac{c+a}{c-a}+1$$

$$=\frac{a+b+a-b}{a-b}+\frac{b+c+b-c}{b-c}+\frac{c+a+c-a}{c-a}$$

$$=\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{b-c}+\frac{2c}{c-a}=2\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)$$

$\therefore$ সমগ্র প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-c}+\dfrac{c}{c-a}}{2\left(\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-c}+\dfrac{c}{c-a}\right)}=\dfrac{1}{2}.$

প্রশ্নমালা 16

সরল কর :—

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$ 2. $\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}}$ 3. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left\{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$ [C. U. '21]

5. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$ [C. U. '25]

6. $\dfrac{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{b}{b-x}+\dfrac{c}{c-x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}}$

7. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

8. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$

9. $\dfrac{x+1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y+1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z+1}{(z-x)(z-y)}$

10. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

11. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

12. $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '23]

13. $\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2a^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{a^2b^2}{(c-b)(c-a)}$ [C. U. '31]

14. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '24]

15. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$ [C. U. '15]

16. $\frac{3a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{3b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{3c-a-b}{(c-a)(c-b)}$ [D. B. '33]

17. $\frac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$ [D. B. '40]

18. $\frac{a^2(b-c)}{(b+a)(a+c)}+\frac{b^2(c-a)}{(c+b)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(a+c)(c+b)}$ [C. U. '47]

19. $\frac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '48]

20. $\frac{(a+1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+1)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c+1)^2}{(c-a)(c-b)}$

21. $\frac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '46]

22. $\frac{x^2+x+1}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+y+1}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2+z+1}{(z-x)(z-y)}$

23. $\frac{b+c}{2bc}\left(b+c-a\right)+\frac{c+b}{2ca}\left(c+a-b\right)+\frac{a+b}{2ab}\left(a+b-c\right)$

24. $\frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2ab}+\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$
$+\frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$

25. $\frac{x^3+y^3-z^3}{xy}\left(x+y\right)+\frac{y^3+z^3-x^3}{yz}\left(y+z\right)$
$+\frac{z^3+x^3-y^3}{zx}\left(z+x\right)$

26. $\frac{a}{bc(a-b)(a-c)}+\frac{b}{ca(b-c)(b-a)}+\frac{c}{ab(c-a)(c-b)}$

[A. U. '17]

27. $\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$ [A. U. '41]

28. $\frac{a^2x-ay+z}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2x-by+z}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2x-cy+z}{(c-a)(c-b)}$.

§ 28. বীজগণিতের সাহায্যে প্রশ্ন সমাধান।

পাটীগণিতের বিবিধ প্রশ্ন বীজগণিতের সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায়। প্রথমে পাটীগণিতে প্রশ্নটিকে বীজগণিতের আকারে প্রকাশ করিতে হয়। এরূপ করিতে হইলে প্রশ্নে যেটি নির্ণেয় বা অজ্ঞাত রাশি তাহাকে বীজগণিতের রাশি x ধরিয়া প্রশ্নের শর্ত অনুযায়ী xএর সহিত সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে হয়। তখন প্রশ্নটি বীজগণিতের আকারে প্রকাশিত হইল। এই আকার হইল একটি সমীকরণ। এই সমীকরণ হইতে xএর যে মান পাওয়া যায় তাহাই হইল ঐ অজ্ঞাত রাশি অর্থাৎ প্রশ্নটির উত্তর। একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি সংক্রান্ত প্রশ্নের যে সমীকরণ হয় তাহা হইল **সরল সমীকরণ**।

প্রশ্ন। 70কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন একটি অংশ অপরটির দ্বিগুণ অপেক্ষা 4 বেশী হয়।

এখানে একটি অংশ জানিলেই অপর অংশটি 70 হইতে বিয়োগ করিয়া পাওয়া যাইবে। মনে কর, বড় অংশটি x, সুতরাং অপর অংশটি $70-x$ এবং উহার দ্বিগুণ $2(70-x)$

এক্ষণে প্রদত্ত শর্তানুসারে $x=2(70-x)+4$, ইহাই হইল প্রশ্নটির বীজগণিতীয় রূপ। এইরূপ সমীকরণ সমাধান নিম্নে দেখান হইতেছে।

সরল সমীকরণ (Simple Equation)

(একটি অজ্ঞাতরাশি-বিশিষ্ট)

§ 29. সমীকরণ সমাধানের প্রণালী নিম্নের নিয়মগুলির উপর প্রতিষ্ঠিত :

(1) যদি সমীকরণের উভয় পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ বা বিয়োগ করা হয়, তবে পক্ষদ্বয় সমান থাকিবে। উভয় পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে পক্ষদ্বয় সমান থাকিবে।

(2) যদি সমীকরণের প্রত্যেক পক্ষ একটি করিয়া ভগ্নাংশ হয়, তবে

বজ্রগুণন দ্বারা উভয় গুণফল সমান হইবে। একপক্ষের লবের সহিত অপর পক্ষের হরের গুণ করাকে বজ্রগুণন বলে। যথা, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $ad=bc$ হইবে।

কারণ, উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$, $\therefore\ ad=bc.$

(3) **পক্ষান্তর** : উপরের (1) হইতে পক্ষান্তরকরণ নিয়মটি পাওয়া যায়। নিয়মটি এই যে প্রয়োজন হইলে সমীকরণের এক পক্ষের কোন পদকে বিপরীত চিহ্নযুক্ত করিয়া অপরপক্ষে স্থানান্তরিত করা যায়।

(4) পক্ষান্তর প্রক্রিয়ার দ্বারা অজ্ঞাত রাশি x-কে বামদিকে এবং অন্য পদগুলিকে অন্যদিকে বসাইতে হয়। তারপর গুণ-ভাগ সম্বন্ধীয় স্বতঃসিদ্ধের প্রয়োগ করিতে হয়।

উদা. 1. সমাধান কর : $(x+2)(x-3)+(x+3)(x-4)=x(2x-5).$

বামপক্ষ $=x^2-x-6+x^2-x-12=2x^2-2x-18$;
ডানপক্ষ $=2x^2-5x.$ $\therefore\ 2x^2-2x-18=2x^2-5x,$
অথবা, $2x^2-2x-2x^2+5x=18$ (পক্ষান্তর করিয়া)
অথবা, $3x=18,$ $\therefore\ x=6.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{4}=\frac{x-5}{5}.$

এখানে, হরগুলির ল. সা. গু. $=60$; উভয় পক্ষকে 60 দিয়া গুণ করিলে,

$$\frac{x-2}{2}\times 60+\frac{x-3}{3}\times 60+\frac{x-4}{4}\times 60=\frac{x-5}{5}\times 60$$

অথবা, $30(x-2)+20(x-3)+15(x-4)=12(x-5)$
অথবা, $30x-60+20x-60+15x-60=12x-60$
অথবা, $65x-12x=120$, অথবা, $53x=120$, $\therefore\ x=\frac{120}{53}.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}.$

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. $6a$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই
$6(a-x)+3(2a-x)=2(3a-x)$, বা, $6a-6x+6a-3x=6a-2x,$
বা, $-9x+2x=6a-12a$, বা, $-7x=-6a$, $\therefore\ x=\frac{6}{7}a.$

উদা. 4. $\frac{x+5}{2x+3}=\frac{x+3}{2x+1}$ কে সমাধান করিতে হইবে।

বজ্রগুণন করিয়া পাই, $(x+5)(2x+1)=(2x+3)(x+3)$
বা, $2x^2+11x+5=2x^2+9x+9$
বা, $2x^2+11x-2x^2-9x=9-5$
বা, $2x=4.$ $\therefore\ x=2.$

প্রশ্নমালা 17

সমাধান কর (Solve) :—

1. $(x-1)(x-2)=x^2+5$ 2. $(x+a)(x+b)=x^2+ab$

3. $(x+1)^2+(x+2)(x+3)=2x(x+7)$

4. $(x-3)(x-4)+(x-4)(x+5)=2x^2-3$

5. $(x+1)^2+(x-2)^2+(x+3)^2=3x^2-14$

6. $a(x-a)+b(x-b)+c(x-c)=2(ab+ac+bc)$

7. $(x+a+b)^2=2x^2-(x+a-b)^2$

8. $x=\frac{ax-b^2}{c}$ 9. $\frac{a}{bx}+\frac{b}{ax}=a^2+b^2$

10. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}=\frac{x+1}{2}$ 11. $\frac{x-3}{4}+\left(2x-6\right)=\frac{6x-3}{2}$

12. $\frac{3+x}{4}-\frac{x-2}{3}-\frac{x+1}{2}+2=0$ 13. $\frac{4x-9}{14}-\frac{12x-11}{7}=2$

14. $\frac{1}{2}(2x+3)-\frac{1}{12}(x-1)=\frac{2}{3}(x-1)$

15. $\frac{x-a}{2}-\frac{4x-a}{3}+\frac{5x-a}{4}=0$

16. $\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-4)=\frac{37}{15}$

17. $\frac{ax-b}{bc}+\frac{bx-c}{ca}+\frac{cx-a}{ab}=0$

18. $\frac{5}{6}x-\frac{\frac{2}{3}x-1}{3}=x+\frac{\frac{1}{3}x-4}{2}-1$

19. $\frac{8}{x+2}=\frac{6}{x+5}$ 20. $\frac{2x+4}{x-1}=2-\frac{2}{x-3}$.

§ 30. দশমিক ভগ্নাংশ সহগ সংযুক্ত সমীকরণের উদাহরণ।

উদাহরণ। সমাধান কর : $\frac{x}{\cdot5}-\frac{1}{\cdot05}+\frac{x}{\cdot005}-\frac{1}{\cdot0005}=0.$ [ক. প্র.]

দশমিকগুলিকে ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়া সমীকরণটি হইল

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{20}}+\frac{x}{\frac{1}{200}}-\frac{1}{\frac{1}{2000}}=0,$$

বা, $2x-20+200x-2000=0$, বা, $202x=2020$, $\therefore\ x=10.$

প্রশ্নমালা 18

সমাধান কর :—

1. $\cdot19x-\cdot4=\cdot1x-\cdot31x$ 2. $\cdot02x+x+1\cdot32x=1\cdot17$

3. $x-\frac{2x-2\cdot3}{\cdot7}+\frac{x-5}{\cdot35}=0$ 4. $\cdot5x+\frac{\cdot02x+\cdot07}{\cdot03}=9\cdot5+\frac{x+2}{9}$

5. $\frac{x}{0\cdot4}-\frac{x-4}{0\cdot6}=\frac{2-3x}{0\cdot5}+30$

6. $\frac{0\cdot3x-0\cdot2}{0\cdot5}-\frac{0\cdot5x+0\cdot1}{1\cdot6}=\frac{4x-1}{15}$

7. $0\cdot2(x-0\cdot5)-0\cdot35=0\cdot5(0\cdot25x-0\cdot125)$

8. $\frac{5\cdot2x}{13}-\frac{1\cdot2x}{5}\left(\frac{3}{5}-0\cdot1\right)=0\cdot1x+\cdot358+\frac{2-5x}{4}$

9. $\frac{0\cdot3x+1\cdot8}{0\cdot07}-\frac{0\cdot3x}{0\cdot1}=\frac{0\cdot9x-0\cdot3}{0\cdot09}$

10. $0\cdot65x+\frac{0\cdot585x-0\cdot975}{0\cdot6}=\frac{1\cdot56}{0\cdot2}+\frac{0\cdot78-0\cdot39x}{0\cdot9}.$

§ 31. **সমীকরণ সমাধানের কয়েকটি বিশেষ প্রক্রিয়া নিম্নে আলোচিত হইল :—**

(i) **সুবিধামত পক্ষান্তর প্রক্রিয়া :**

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{12x+1}{4}=\frac{15x-1}{5}+\frac{2x-5}{3x-1}.$

এস্থলে, লক্ষ্য কর ডানপক্ষের প্রথম পদটিকে বামদিকে আনিয়া বামপক্ষকে সরল করাই সুবিধাজনক। এইরূপে সমীকরণটি হইল

$$\frac{12x+1}{4}-\frac{15x-1}{5}=\frac{2x-5}{3x-1},$$

বা, $\frac{60x+5-60x+4}{20}=\frac{2x-5}{3x-1}$, বা, $\frac{9}{20}=\frac{2x-5}{3x-1}.$

বা, $9(3x-1)=20(2x-5)$ (বজ্রগুণন দ্বারা)

বা, $27x-9=40x-100$, অথবা, $27x-40x=9-100$

বা, $-13x=-91$, $\therefore\ x=7.$

(ii) **সুবিধামত পদগুলিকে বিচ্ছিন্নকরণ :**

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{5}{x+2}+\frac{6}{x-4}=\frac{11}{x-3}.$

এখানে, $\because\ \frac{11}{x-3}=\frac{5}{x-3}+\frac{6}{x-3}$, $\therefore\ \frac{5}{x+2}+\frac{6}{x-4}=\frac{5}{x-3}+\frac{6}{x-3}$

অথবা, $\frac{5}{x+2}-\frac{5}{x-3}=\frac{6}{x-3}-\frac{6}{x-4}$

অথবা, $\frac{5x-15-5x-10}{(x+2)(x-3)}=\frac{6x-24-6x+18}{(x-3)(x-4)}$

বা, $\frac{-25}{(x+2)(x-3)}=\frac{-6}{(x-3)(x-4)}$,

বা, $\frac{25}{(x+2)(x-3)}=\frac{6}{(x-3)(x-4)}$,

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. $(x+2)(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই, $25(x-4)=6(x+2)$,

বা, $25x-100=6x+12$, বা, $19x=112$, $\therefore$ $x=\frac{112}{19}$.

(iii) ভাগ প্রক্রিয়া :

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{2x-6}{x-4}+\frac{6x-12}{2x-5}=\frac{10x-28}{2x-7}$.

প্রত্যেক ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া সম্পূর্ণ ভাগফল বসাইলে সমীকরণটি হয়, $2+\frac{2}{x-4}+3+\frac{3}{2x-5}=5+\frac{7}{2x-7}$,

বা, $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{2x-5}=\frac{7}{2x-7}$,

বা, $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{2x-5}=\frac{4}{2x-7}+\frac{3}{2x-7}$,

বা, $\frac{2}{x-4}-\frac{4}{2x-7}=\frac{3}{2x-7}-\frac{3}{2x-5}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{4x-14-4x+16}{(x-4)(2x-7)}=\frac{6x-15-6x+21}{(2x-7)(2x-5)}$

বা, $\frac{2}{(x-4)(2x-7)}=\frac{6}{(2x-7)(2x-5)}$,

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. $(x-4)(2x-7)(2x-5)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই, $2(2x-5)=6(x+4)$

বা, $4x-10=6x-24$, বা, $2x=14$, $\therefore$ $x=7$.

(iv) **বিয়োগ প্রক্রিয়া :** ভাগ প্রক্রিয়ার পরিবর্তে সুবিধামত সংখ্যা বিয়োগ করিলেও সমাধান সহজ হয়।

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{3x-8}{x-3}+\frac{4x-25}{x-6}=\frac{5x-9}{x-2}+\frac{2x-11}{x-5}$

বা, $\frac{3x-8}{x-3}-3+\frac{4x-25}{x-6}-4=\frac{5x-9}{x-2}-5+\frac{2x-11}{x-5}-2$

বা, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{x-6-x+3}{x^2-9x+18}=\frac{x-5-x+2}{x^2-7x+10}$,

বা, $\frac{-3}{x^2-9x+18}=\frac{-3}{x^2-7x+10}$

$\therefore$ $x^2-7x+10=x^2-9x+18$. $\therefore$ $2x=8$, $\therefore$ $x=4$

(v) **বিবিধ কৌশল :**

উদা. 5. সমাধান কর : $\dfrac{6x^2+17x+9}{6x^2-5x-3}=\dfrac{3x+7}{3x-4}$.

দ্রষ্টব্য : যদি $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ হয়, তবে $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ হইবে।

কারণ, $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}\times\dfrac{b}{c}$, $\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

এই প্রণালী অবলম্বন করিলে, সমীকরণটি হয়

$\dfrac{6x^2+17x+9}{3x+7}=\dfrac{6x^2-5x-3}{3x-4}$, এক্ষণে লবকে হর দ্বারা ভাগ

করিয়া পাই, $2x+1+\dfrac{2}{3x+7}=2x+1+\dfrac{1}{3x-4}$,

উভয় পক্ষ হইতে $2x+1$ বাদ দিয়া পাই $\dfrac{2}{3x+7}=\dfrac{1}{3x-4}$,

বা, $6x-8=3x+7$, বা, $3x=15$, $\therefore\ x=5$.

উদা. 6. সমাধান কর : $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$.

প্রতি ভগ্নাংশ হইতে 1 বিয়োগ করিলে সমীকরণটি হয়

$$\frac{x-a}{b+c}-1+\frac{x-b}{c+a}-1+\frac{x-c}{a+b}-1=3-3$$

বা, $\dfrac{x-a-b-c}{b+c}+\dfrac{x-b-c-a}{c+a}+\dfrac{x-c-a-b}{a+b}=0$

বা, $(x-a-b-c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)=0$.

এখন বামপক্ষটি দুইটি রাশির গুণফল হইল ; ইহার মান শূন্য হইতে হইলে যে কোন একটি রাশিকে শূন্য হইতে হইবে। এখানে স্পষ্টতঃ দ্বিতীয় গুণনীয়কটি শূন্য হইতে পারে না ; কারণ a, b, c-এর মান সম্বন্ধে কিছু জানা নাই।

$\therefore\ x-a-b-c=0$, $\therefore\ x=a+b+c$.

উদা. 7. সমাধান কর : $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-a+c}=\dfrac{1}{x-b-c}-\dfrac{1}{x-b}$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{x-b-c}+\dfrac{1}{x-a+c}$

অথবা, $\dfrac{x-b+x-a}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{x-a+c+x-b-c}{(x-b-c)(x-a+c)}$

অথবা, $\dfrac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}-\dfrac{2x-a-b}{(x-b-c)(x-a+c)}=0$

অথবা, $(2x-a-b)\left\{\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}-\dfrac{1}{(x-b-c)(x-a+c)}\right\}=0$

এখানে প্রথম গুণনীয়ক $2x-a-b=0$ হইলে $x=\frac{1}{2}(a+b)$ হয় ;
এবং দ্বিতীয় গুণনীয়কটি $=0$ হইলে

$$(x-a)(x-b)=(x-b-c)(x-a+c) \text{ হয়}$$

অর্থাৎ $x^2-(a+b)x+ab=x^2-(a+b)x+(b+c)(a-c)$

অর্থাৎ $ab=ab+ac-bc-c^2$

অর্থাৎ $a-b-c=0$, অর্থাৎ $a=b+c$ হয় ;

কিন্তু ইহা হইতে পারে না, কারণ $a=b+c$ হইলে সমীকরণটি অভেদে পরিণত হয়। $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{1}{2}(a+b)$.

প্রশ্নমালা 19

সমাধান কর :—

1. $\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{x+5}$ 2. $\dfrac{x+2}{x-1}=1-\dfrac{1}{x-3}$ 3. $\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{x+a}{x+b}$

4. $\dfrac{ax+b}{cx+a}=\dfrac{ax+c}{cx+b}$ 5. $\dfrac{2(x-3)}{2x+5}-\dfrac{x+6}{x-3}=0$ 6. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=0$

7. $\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{x+3a}{x+a+b}$ 8. $\dfrac{7x^2-4}{56x-47}+\dfrac{7x-11}{6}=\dfrac{31x-41}{24}$

9. $\dfrac{13x-16}{15x-9}+\dfrac{98x-73}{21}=\dfrac{14x-9}{3}$ 10. $\dfrac{2x}{2x-1}+\dfrac{2x+1}{2x}=2$

11 $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-7}$

12 $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{x-8}-\dfrac{1}{x-9}$ 13. $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{7}{x-4}$

14. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{2x+3}=\dfrac{6}{3x+5}$ 15. $\dfrac{15}{3x+11}-\dfrac{7}{3x+5}=\dfrac{8}{3x+14}$

16. $\dfrac{9}{3x-4}-\dfrac{8}{x+7}+\dfrac{20}{4x+1}=0$

17. $\dfrac{1}{x-6a}+\dfrac{2}{x+3a}+\dfrac{3}{x-2a}=\dfrac{6}{x-a}$

18. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{22x+30}{11x-18}$ 19. $\dfrac{2x+3}{x+1}-\dfrac{4x+5}{4x+4}=\dfrac{3x+3}{3x+1}$

20. $\dfrac{3x+2}{x-1}+\dfrac{2(x-2)}{x+2}=5$ [C.U. '20 ; D.B. '29]

21. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-5}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7}$

22. $\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{3x+1}{3x-2}=\dfrac{3x+2}{3x-1}+\dfrac{6x+1}{6x-5}$

23. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a+c}+\frac{1}{x+b-c}$ [C. U. '40]

24. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$ [C. U. '48]

25. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$ [C. U. '11]

26. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$

27. $\frac{x-b-c}{1+bc}+\frac{x-c-a}{1+ca}+\frac{x-a-b}{1+ab}=a+b+c$

28. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c$

29. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+a+b+c=0$ [C. U. '42]

30. $\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c)$

31. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c)$

32. $\frac{x-a}{b+c+2a}+\frac{x-b}{c+a+2b}+\frac{x-c}{a+b+2c}=-3$

33. $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\frac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\frac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

34. $\frac{x-a^3}{b+c}+\frac{x-b^3}{c+a}+\frac{x-c^3}{a+b}=2a^2+2b^2+2c^2-ab-bc-ca$

35. $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\frac{x+5}{x+8}$ [C. U. '44]

36. $\frac{(x+1)(x+9)}{(x+2)(x+4)}=\frac{(x+6)(x+10)}{(x+5)(x+7)}$

37. $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$ [C. U. '41]

38. $\left(\frac{x-6}{x+7}\right)^2=\frac{(x-7)(x-5)}{(x+6)(x+8)}$ 39. $\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2=\frac{(x+5)(x+1)}{x(x+4)}$

40. $\left(\frac{x-5}{x-6}\right)^3=\frac{x-4}{x-7}$ 41. $\left(\frac{3x-28}{3x-26}\right)^3=\frac{x-10}{x-8}$

42. $\frac{4x^2+8x+17}{6x^2+11x+24}=\frac{2x+3}{3x+4}$ 43. $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3=\frac{x+2a-b}{x-a+2b}$

44. $$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{(x+1)(x+6)}$$

45. $$\frac{1}{a(b-x)}+\frac{1}{b(c-x)}=\frac{1}{a(c-x)}.$$ [P. U. '21]

সরল সমীকরণসাধ্য প্রশ্নাবলী

§ 32. কোন প্রশ্নের প্রতীক সমীকরণ গঠন প্রণালী পূর্বে বর্ণিত হইয়াছে। এখন সমীকরণ সাহায্যে জটিল প্রশ্নাবলীর সমাধান প্রদর্শিত হইতেছে।

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তি যত মূল্যে একখানি ছবি কিনিলেন; তাহা বাঁধাইতে তাঁহার তত খরচ হইল। যদি বাঁধাইবার খরচ 20 পয়সা কম এবং ছবির মূল্য 15 পয়সা বেশী হইত, তবে ছবির মূল্য বাঁধাই খরচের দ্বিগুণ হইত। ছবির মূল্য কত?

মনে কর, ছবির মূল্য x পয়সা, তাহা হইলে বাঁধাই খরচও x পয়সা।

এখন ছবির মূল্য 15 পয়সা বেশী হইলে মূল্য হইত $(x+15)$ পয়সা এবং বাঁধাই খরচ 20 পয়সা কম হইলে খরচ হইত $(x-20)$ পয়সা।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে সমীকরণ হইল, $x+15=2(x-20)$,

বা, $x=15+40=55$.

$\therefore$ ছবির মূল্য $=55$ পয়সা।

উদা. 2. একটি ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা বেশী; যদি উভয়ের সহিত 3 যোগ করা যায়, তবে ভগ্নাংশটির মান $\frac{3}{4}$ হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ভগ্নাংশটির লব x, সুতরাং হর $=x+5$, $\therefore$ ভগ্নাংশটি হইল $\frac{x}{x+5}$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $\frac{x+3}{x+5+3}=\frac{3}{4}$, বা $4x+12=3x+24$, $\therefore x=12$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{12}{12+5}=\frac{12}{17}$. [পরীক্ষা : $\frac{12+3}{17+3}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$]

উদা. 3. একদল যাত্রী এক হোটেলে রাত্রি যাপন করিতে উঠিল। হোটেলে যতগুলি ঘর আছে তাহাতে প্রত্যেকের জন্য পৃথক্ পৃথক্ ঘরের সংকুলান হয় না। এক এক ঘরে দুইজন করিয়া থাকিলে দুইটি ঘর খালি থাকে এবং প্রত্যেক ঘরে চারিজন করিয়া থাকিলে সাতটি ঘর খালি থাকে। ঘরের মোট সংখ্যা কত?

মনে কর, ঘরের সংখ্যা x, সুতরাং যাত্রীর সংখ্যা $=2(x-2)$.

এখন প্রত্যেক ঘরে চারিজন থাকিলে ঘর লাগে $\frac{2(x-2)}{4}$

সুতরাং ঘর খালি থাকে $x-\frac{2(x-2)}{4}=x-\frac{x-2}{2}=\frac{x+2}{2}=\frac{1}{2}x+1$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}x+1=7$, বা, $\frac{1}{2}x=6$, $\therefore$ $x=12$, $\therefore$ ঘরের সংখ্যা $=12$,

উদা. 4. অমলের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে 6 বৎসর পূর্বেকার বয়সের তিনগুণ বিয়োগ করিলে অমলের বর্তমান বয়সের সমান হয়। তাহার বর্তমান বয়স কত ?

অমলের বর্তমান বয়স x বৎসর হইলে, 6 বৎসর পূর্বে বয়স ছিল $(x-6)$ বৎসর ; সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $2x-3(x-6)=x$, বা, $-x+18=x$,

বা, $2x=18$, $\therefore$ $x=9$, $\therefore$ অমলের বর্তমান বয়স 9 বৎসর।

উদা. 5. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 52 এবং উহাদের অন্তর 2 ; সংখ্যা দুইটি কত ?

মনে কর, বড় সংখ্যাটি x, $\therefore$ ছোটটি $=52-x$;

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $x-(52-x)=2$, বা, $2x=54$, $\therefore$ $x=27$,

$\therefore$ বড় সংখ্যাটি $=27$, এবং ছোটটি $=52-27=25$.

উদা. 6. 286কে এমন চারিটি অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যে প্রথম অংশে 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সমান সমান সংখ্যা হয়।

মনে কর, প্রতিক্ষেত্রে যে সংখ্যা হয় তাহা $=x$.

$\therefore$ প্রথম অংশ $=x-1$, দ্বিতীয় অংশ $=x+2$, তৃতীয় অংশ $=\frac{1}{3}x$ এবং চতুর্থ অংশ $=4x$; এবং অংশগুলির সমষ্টি $=286$;

সুতরাং $(x-1)+(x+2)+\frac{1}{3}x+4x=286$,

বা, $6x+\frac{1}{3}x=285$, বা, $\frac{19}{3}x=285$, $\therefore$ $x=\frac{285\times 3}{19}=45$.

$\therefore$ অংশগুলি যথাক্রমে, 44, 47, 15, 180.

উদা. 7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশক-স্থানীয় অঙ্কটি একক-স্থানীয় অঙ্কটি অপেক্ষা 5 বেশী ; সংখ্যাটি হইতে অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 5 গুণ বিয়োগ করিলে ঐ সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের পরস্পর স্থান বিনিময় হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর, একক-স্থানীয় অঙ্কটি x ; সুতরাং দশক-স্থানীয় অঙ্কটি $=x+5$;

$\therefore$ সংখ্যাটি $=10(x+5)+x$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $10(x+5)+x-5(x+5+x)=10x+(x+5)$

বা, $x+25=11x+5$, বা, $10x=20$, $\therefore$ $x=2$.

$\therefore$ সংখ্যাটির একক-স্থানীয় অঙ্কটি হইল 2, এবং দশক-স্থানীয় অঙ্কটি হইল $2+5$ বা, 7. $\therefore$ সংখ্যাটি $=7\times10+2=72$.

প্রশ্নমালা 20

1. একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ 50 সেন্টিমিটার এবং ইহার একটি বাহু 48 সেন্টিমিটার ; ক্ষেত্রটির কালি নির্ণয় করিতে হইবে।

2. এমন দুইটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যে ছোটটির $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{11}$ অংশ একত্রে বড়টির $\frac{1}{5}$ ও $\frac{1}{9}$ অংশের সমষ্টি অপেক্ষা 1 বেশী হয়।

3. একটি সংখ্যাকে সমান সমান 4 ভাগে বিভক্ত করিয়া ভাগগুলি পরস্পর গুণ করিলে যাহা হয়, উক্ত সংখ্যাকে সমান সমান 5 ভাগে বিভক্ত করিয়া ভাগগুলি পরস্পর গুণ করিলে তাহাই হয়। সংখ্যাটি কত ?

4. কোন ভগ্নাংশের লবটি হরের অর্ধেক। লবের সহিত 7 যোগ করিলে এবং হর হইতে 19 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশ হয় তাহার মান 2 ; ভগ্নাংশটি কত ?

5. কোন ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা 4 কম ; লব হইতে 10 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশটি হয়, হরের সহিত 30 যোগ করিলেও সেই ভগ্নাংশটি হয়। প্রদত্ত ভগ্নাংশটি নির্ণয় করিতে হইবে।

6. একদল যাত্রীর পুরুষের সংখ্যা ঐ দলের $\frac{1}{6}$ অংশ অপেক্ষা 2 জন বেশী, স্ত্রীলোকের সংখ্যা দলের $\frac{1}{4}$ অংশ অপেক্ষা 3 জন কম, এবং বালকের সংখ্যা দলের $\frac{1}{2}$ অংশ অপেক্ষা 7 জন বেশী। ঐ দলে মোট কতজন আছে ?

7. টাকা এবং 50-পয়সা মুদ্রায় একটি থলিতে মোট 365 টাকা আছে। 50-পয়সা মুদ্রাগুলির মোট মূল্য টাকাগুলির মোট মূল্য অপেক্ষা 13 টাকা কম হইলে, মুদ্রাগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।

8. একটি লোককে 40 দিনের জন্য এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, সে যেদিন কাজ করিবে না সেদিন তাহাকে 60 পয়সা জরিমানা দিতে হইবে। সে 10 দিন কাজ করিল না, এবং মোট 55 টা. 80 পয়সা পাইল। তাহার দৈনিক মজুরী কত ?

9. একটি ঘোড়া 840 টাকায় বিক্রয় করিলে যত ক্ষতি হয়, 1050 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার $\frac{3}{4}$ অংশ লাভ হয়। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ?

10. এক ব্যক্তি 25 টাকায় 270টি কমলালেবু ক্রয় করিল। উহার

কতকগুলি টাকায় 10টি দরে এবং বাকিগুলি টাকায় 12টি দরে কিনিয়া থাকিলে কোন্ প্রকারের কতগুলি লেবু কিনিয়াছিল ?

11. একটি ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর 3 বেশী এবং লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি 1 বৃদ্ধি পায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [C. U. '33]

12. $\frac{5}{12}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের সহিত কত যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{6}{7}$ হইবে ?

13. $\frac{3}{4}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের সহিত একটি সংখ্যা যোগ করিলে যাহা হয়, $\frac{5}{6}$এর লব ও হর হইতে সেই সংখ্যাটি বিয়োগ করিলে তাহাই হয়। ঐ সংখ্যাটি কত ?

14. 320কে এমন চারিটি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 2 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 3 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশের 4 গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 5 ভাগ করিলে একই ফল হয়।

15. 621 টাকা A, B, C, Dএর মধ্যে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। A যদি 7 টাকা বেশী পাইত, B যদি 8 টাকা কম পাইত, C যদি তাহার টাকার 11 গুণ পাইত এবং D যদি তাহার টাকার $\frac{1}{12}$ অংশ পাইত, তবে সকলেই সমান সমান টাকা পাইত। কে কত টাকা পাইয়াছিল ?

16. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 10 ; সংখ্যাটি হইতে 18 বিয়োগ করিলে বিয়োগফলের অঙ্কদ্বয় সমান হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 7 ; অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যাটি হয় তাহা হইতে 2 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল প্রথম সংখ্যাটির দ্বিগুণ হয় ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

18. কোন নির্দিষ্ট টাকা হইতে কতকগুলি বালকের প্রত্যেককে 48 পয়সা করিয়া দিলে 2 টাকা অবশিষ্ট থাকে, এবং প্রত্যেককে 61 পয়সা করিয়া দিলে 60 পয়সা কম পড়ে। কতগুলি বালক আছে নির্ণয় কর।

19. একজন মজুরকে 30 দিনের জন্য এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল যে সে কাজ করিলে প্রত্যহ 2 টা. 50 প. করিয়া পাইবে ; কিন্তু অনুপস্থিত থাকিলে প্রতিদিনের জন্য তাহাকে 1 টাকা জরিমানা দিতে হইবে। সে মোট 47 টাকা পাইল। সে কতদিন কাজ করিয়াছিল ?

20. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল ; 20 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে ; পিতার বর্তমান বয়স কত ?

21. বর্তমানে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 7 : 4 হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স কত ? [C. U. '32]

22. এক ব্যক্তি 30 বৎসর বয়সে রাজা হইয়া তাঁহার জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ কাল রাজত্ব করিলেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন? [C.U. '30]

23. এক ব্যক্তি তাহার দেনার এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 200 টাকা বেশী পরিশোধ করিল এবং তখনও সে যাহা শোধ করিয়াছে তাহা অপেক্ষা 210 টাকা বেশী দেনা থাকিল। প্রথমে তাহার কত টাকা দেনা ছিল? [C. U. '13]

24. কোন পিতার বয়স বড় ছেলের বয়সের 4 গুণ এবং ছোট ছেলের বয়সের 5 গুণ। বড় ছেলের বয়স যখন তাহার বর্তমান বয়সের 3 গুণ হইবে, তখন পিতার বয়স ছোট ছেলের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 4 বৎসর বেশী হইবে। তাহার বর্তমান বয়স কত? [W. B. S. F. '53]

25. এক ব্যক্তি এক টাকায় তুইটি দরে এবং এক টাকায় তিনটি দরে সমান সংখ্যক আপেল কিনিয়া সবগুলি 2 টাকায় 5টি দরে বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি তাহার 4 টাকা ক্ষতি হইয়া থাকে, তবে সে কতগুলি আপেল কিনিয়াছিল?

26. 12 মিটার উচ্চ একটি বৃক্ষের মূলে একটি সর্পের গর্ত ছিল। সর্পটি গর্তের দিকে যাইবার সময় যখন গর্ত হইতে 36 মিটার দূরে, তখন বৃক্ষচূড়াস্থিত একটি ময়ূর তাহাকে আক্রমণ করিতে ধাবিত হইল। সর্পটি যে স্থানে ময়ূর কর্তৃক আক্রান্ত হইল তাহা সর্পটি প্রথম যে স্থানে দৃষ্ট হয়, সে স্থল হইতে যতদূর, বৃক্ষচূড়া হইতেও ততদূর। গর্ত হইতে কত দূরে সর্পটি ধৃত হইয়াছিল?

---

§ 33. **ঘড়ি সম্বন্ধীয় সমাধান :—**

(1) ঘড়ির dialটিকে ছোট ছোট 60 ভাগে বিভক্ত করা আছে। এক একটি ভাগকে মিনিট-ঘর বা minute space বা minute division বলে।

(2) মিনিটের কাঁটা (minute-hand) যতক্ষণে 60 মিনিট-ঘর ঘোরে, ঘণ্টার কাঁটা (hour-hand) ততক্ষণে 5 মিনিট-ঘর ঘোরে অর্থাৎ একই সময়ে ঘণ্টার কাঁটা মিনিটের কাঁটার $\frac{1}{12}$ অংশ যায়।

(3) তুইটি কাঁটা (a) পরস্পর মিলিত হইয়াছে (coincide) বলিলে বুঝিতে হইবে উভয়ের মধ্যে কোন মিনিট-ঘর ব্যবধান নাই; (b) উহারা পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত (opposite to each other) বলিলে বুঝিবে উভয়ের মধ্যে 30 মিনিট-ঘর ব্যবধান আছে; (c) উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত (in the same straight line) বলিলে বুঝিবে (i) হয় উভয়ে মিলিত হইয়াছে, না হয় (ii) একটি অন্যটির বিপরীত দিকে একই রেখায় আছে; (d) উহারা পরস্পর সমকোণে নত (at right angles to each other) বলিলে বুঝিবে উভয়ের মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান আছে।

উদাহরণ 1. 7টা ও 8টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি মিলিত হইবে ? [C. U. '33]

মনে কর, 7টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি পরস্পর মিলিত বা সমাপতিত হইবে। 7টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 35 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল, সুতরাং পিছন হইতে আসিয়া ঘণ্টার কাঁটার সহিত মিলিতে হইলে ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা মিনিটের কাঁটাকে 35 মিনিট-ঘর বেশী যাইতে হইবে।

এখন x মিনিটে মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর ও ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর যায়। $\therefore\ x-\frac{x}{12}=35$, বা, $\frac{11x}{12}=35$, বা, $x=35\times\frac{12}{11}=\frac{420}{11}=38\frac{2}{11}$.

অতএব, 7টা $38\frac{2}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি মিলিত হইবে।

উদা. 2. 4টা ও 5টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী হইবে ?

মনে কর, 4টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে থাকিবে। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল। ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা এই 20 মিনিট-ঘর বেশী গেলে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার সহিত মিলিবে এবং তারপর আরও 30 মিনিট-ঘর বেশী গেলে অর্থাৎ মোট 50 মিনিট-ঘর বেশী গেলে তবে কাঁটা দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে থাকিবে।

$$\therefore\quad x-\frac{x}{12}=50, \text{ বা, } \frac{11x}{12}=50 \text{ বা, } 11x=600,$$

$\therefore\ x=54\frac{6}{11}$. $\therefore$ নির্ণেয় সময় = 4টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট।

উদা. 3. 3টা ও 4টার মধ্যে কখন ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা এক সরলরেখায় থাকিবে ? [C. U. 1934]

মনে কর, 3টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি একই সরলরেখায় থাকিবে। (1) একটি কাঁটা অন্যটির উপর সমাপতিত হইলে কিংবা (2) কাঁটা দুইটি পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে থাকিলে এক সরলরেখায় থাকা হয়।

প্রথম পক্ষে, $\because$ 3টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 15 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল, $\therefore$ উহা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 15 মি. ঘর বেশী গেলে উভয়ে মিলিত হইবে।

$$\therefore\ x-\frac{x}{12}=15, \text{ বা, } \frac{11x}{12}=15, \quad \text{বা, } \quad x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}.$$

দ্বিতীয় পক্ষে, মিনিটের কাঁটা 15 মিনিট-ঘর বেশী গেলে ঘণ্টার কাঁটার সহিত মিলিত হইবে, তারপর আরও 30 মিনিট-ঘর বেশী গেলে উহারা পরস্পর বিপরীত দিকে থাকিবে। $\therefore\ x-\frac{x}{12}=15+30$

$$\therefore\ \frac{11x}{12}=45,\quad \therefore\ x=\frac{540}{11}=49\frac{1}{11}.$$

অতএব, 3টা বাজিয়া $16\frac{4}{11}$ মিনিটে এবং 3টা বাজিয়া $49\frac{1}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি এক সরলরেখায় থাকিবে।

উদা. 4. 4টা ও 5টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন পরস্পর সমকোণে নত থাকিবে? [C. U. 1935, '45]

মনে কর, 4টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি সমকোণে নত থাকিবে। কাঁটা দুইটির মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিলে পরস্পর সমকোণে থাকা হয়। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে আছে, সুতরাং (i) মিনিটের কাঁটা যদি ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 5 মিনিট-ঘর বেশী যায়, তবে উভয়ের মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকে। (ii) আবার, মিনিটের কাঁটা 20 মিনিট-ঘর বেশী গেলে উভয়ে মিলিত হইবে, তারপর আরও 15 মিনিট-ঘর অর্থাৎ মোট 35 মিনিট-ঘর বেশী গেলে মিনিটের কাঁটা আগাইয়া গিয়া ঘণ্টার কাঁটা হইতে 15 মিনিট-ঘর অন্তর থাকিবে।

$$\therefore\ x-\frac{x}{12}=5\cdots\text{(i) এবং } x-\frac{x}{12}=35\cdots\text{(ii)}$$

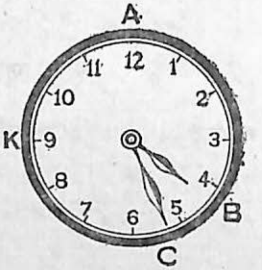
(i) হইতে $11x=60$, $\therefore\ x=5\frac{5}{11}$. (ii) হইতে $11x=420$, $\therefore\ x=38\frac{2}{11}$.

অতএব, 4টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ মিনিটে এবং 4টা বাজিয়া $38\frac{2}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণে নত থাকিবে।

উদা. 5. এক ব্যক্তি গৃহ হইতে 4টা ও 5টার মধ্যে বাহির হইয়া 5টা ও 6টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল তাহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। সে কখন বাহির হইয়াছিল? [C. U. '33 ; Addl. '51]

মনে কর, লোকটি 4টা x মিনিটের সময় বাহিরে গিয়াছিল, এবং ঐ সময় ঘণ্টার কাঁটা 4টা ও 5টার মধ্যে B বিন্দুতে এবং মিনিটের কাঁটা 5টা ও 6টার মধ্যে C বিন্দুতে ছিল। এখন 4টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 12টার ঘর হইতে x মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা 4টার ঘর হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট-ঘর আগাইয়া ছিল।

এখন চিত্রে দেখ, চাপ AC $= x$ মিনিট-ঘর,



চাপ $= AB = 20 + \frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর,

চাপ CKA $= 60 - x$ মিনিট-ঘর,

চাপ BC $= x - \left(20 + \frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর।

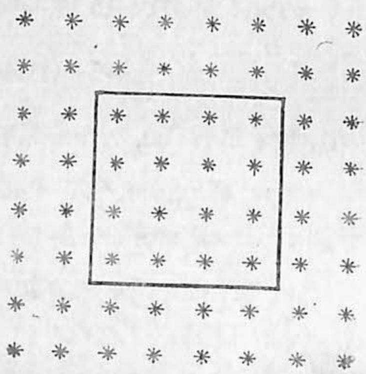
লোকটি যতক্ষণ বাহিরে ছিল ততক্ষণে মিনিটের কাঁটা CKAB চাপ অর্থাৎ $\left(60 - x + 20 + \frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর গিয়াছে এবং ঘণ্টার কাঁটা BC চাপ অর্থাৎ $x - \left(20 + \frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর গিয়াছে। একই সময়ে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ যায়।

$$\therefore \quad 60 - x + 20 + \frac{x}{12} = 12\left\{x - \left(20 + \frac{x}{12}\right)\right\}$$

বা, $80 - \frac{11x}{12} = 11x - 240$, বা, $\frac{143}{12}x = 320$, $\therefore \; x = \frac{3840}{143} = 26\frac{122}{143}$.

অতএব, সে ব্যক্তি 4টা $26\frac{122}{143}$ মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিল।

§ 34. **শূন্যগর্ভ বর্গাকার (Hollow Square):** ঘন বর্গাকারে (solid square) লোক সাজাইলে যদি সম্মুখের সারিতে x জন লোক থাকে, তবে মোট লোকসংখ্যা হইবে x^2.



আর যদি শূন্যগর্ভ বর্গাকারে (hollow square) লোক সাজান হয়, তবে কত গভীর করিয়া সাজান আছে তাহা বলা থাকে। মনে কর, 2-গভীর (2 deep) করিয়া সাজান আছে। এখানে বুঝিতে হইবে, যে-কোন দিক হইতে ভিতরে প্রবেশ করিলে দেখা যাইবে 2 জনের পর স্থান খালি আছে। যদি সম্মুখের সারিতে 8 জন থাকে; তবে মোট লোকসংখ্যা হইবে $8^2 - (8 - 2 \times 2)^2$. চিত্রে ঘনব্যূহ হইতে রেখাবেষ্টিত লোক সরাইয়া দিলে 2-গভীর করিয়া সাজান শূন্যগর্ভ ব্যূহ থাকিবে।

সাধারণ সূত্র এই হইবে—যদি সম্মুখের সারিতে x-সংখ্যক লোক থাকে এবং n-গভীর করিয়া সাজান হয়, তবে মোট লোকসংখ্যা $= x^2 - (x - 2n)^2$.

উদাহরণ। কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যগণকে 3-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইতে পারেন। আরও 800 সৈন্য থাকিলে তিনি সম্মুখ সারিতে পূর্বের সমান লোক রাখিয়া সকলকে 4-গভীর করিয়া সাজাইতে পারিতেন তাঁহার কত সৈন্য ছিল? [C. U. '42]

মনে কর, উভয় গঠনেই সামনের সারিতে x সৈন্য ছিল।

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে মোট সৈন্যসংখ্যা $=x^2-(x-3\times 2)^2$

$$=x^2-(x-6)^2 \cdots (1)$$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মোট সৈন্যসংখ্যা $=x^2-(x-4\times 2)^2$

$$=x^2-(x-8)^2 \cdots (2)$$

কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সৈন্যসংখ্যা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 800 বেশী বলা আছে।

$\therefore \quad x^2-(x-6)^2=x^2-(x-8)^2-800,$

বা, $x^2-x^2+12x-36=x^2-x^2+16x-64-800,$

বা, $4x=828, \quad \therefore \quad x=207.$

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $=207^2-(207-6)^2$

$$=207^2-201^2=(207+201)(207-201)=408\times 6=2448.$$

প্রশ্নমালা 21

1. 2টা ও 3টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমাপতিত হইবে?

2. 5টা ও 6টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমকোণে থাকিবে?

3. 2টা ও 3টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন (1) পরস্পর বিপরীতমুখী, (2) পরস্পর সমকোণে নত, এবং (3) 12 মিনিট-ঘর ব্যবধানে থাকিবে?

4. 5টা ও 6টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি 10 মিনিট-ঘর ব্যবধানে থাকিবে?

5. 1টা ও 2টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি সমকোণে থাকিবে? [C. U. '48]

6. এক ব্যক্তি 5টা ও 6টার মধ্যে ভ্রমণে বাহির হন এবং 6টা ও 7টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখেন তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন? [C. U. '44]

7. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদিগকে 5-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলেন। যদি মোট সৈন্যসংখ্যা 1900 হয়, তবে সম্মুখ সারিতে কত সৈন্য ছিল? [C. U. '38]

8. 40 জন লোককে 2-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে সম্মুখ সারিতে কয়জন থাকিবে ? [B. C. S. '50]

9. একদল লোককে 10-গভীর শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজান যায়। লোকসংখ্যা 1600 বেশী হইলে সকলকে 10-গভীর করিয়া সাজান যায় ; কিন্তু তখন সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা পূর্বের দ্বিগুণ হয়। প্রথমে কত লোক ছিল ? [C. U. 1905]

10. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ দেখিলেন সম্মুখ সারিতে সমান লোক রাখিয়া তাঁহার সৈন্যগণকে 4-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে 50 জন সৈন্য উদ্বৃত্ত থাকে এবং 5-গভীর করিয়া সাজাইলে আরও 50 জন সৈন্য দরকার হয়। তাঁহার কত সৈন্য ছিল ? [C. U. 1903]

11. একদল সৈন্য সমানভাবে সারিবদ্ধ হইয়া যাইতেছিল। তাহাদের সারির সংখ্যা অপেক্ষা সম্মুখ সারিতে 5 জন সৈন্য কম ছিল। শত্রুপক্ষ দৃষ্টিগোচর হইলে সম্মুখ সারিতে সৈন্যসংখ্যা 405 বেশী করিয়া সাজান হইল এবং ইহার জন্য সারি মোট 5টি হইল। ঐ দলে কত সৈন্য ছিল ? [C. U. '37]

12. কোন সৈন্যধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যগণকে 5 ও 6 গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ-বর্গাকারে সাজাইতে পারেন, কিন্তু প্রথম গঠনের সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা অপেক্ষা দ্বিতীয় গঠনে ঐ লোকসংখ্যা 4 জন কম হয়। সৈন্য সংখ্যা কত ? [G. U. '48 ; C. U. 1887]

13. 40 কিলোমিটার দূরবর্তী দুই ব্যক্তি পরস্পরের অভিমুখে চলিয়া $6\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় মিলিত হইল, কিন্তু উহাদের একজন যদি গতিবেগ দ্বিগুণ করিত, তবে ঐ সময়ের $\frac{3}{4}$ সময়ে তাহারা মিলিত হইত। তাহাদের গতিবেগ নির্ণয় কর।

14. এক ব্যক্তি মোটরে 6 ঘণ্টায় 80 কি. মিটার ভ্রমণ করিল। সে উহার প্রথমাংশ ঘণ্টায় 10 কি. মি. বেগে এবং শেষাংশ ঘণ্টায় 18 কি. মি. বেগে গেল। সে কোন্ বেগে কত কিলোমিটার গিয়াছিল ?

15. দুইটি সংখ্যার গুণফল 18225 এবং বৃহত্তর সংখ্যাটিকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে 81 ভাগফল হয়। সংখ্যা দুইটি কত ? [C. U. '45]

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণ

[Simple Equation with Two unknowns]

§ 35. পাটীগণিতীয় বিবিধ প্রশ্নে একটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে তবে ঐ অজ্ঞাত রাশিটিকে x ধরিয়া সরল সমীকরণ সাহায্যে তাহার সমাধান প্রণালী শিখান হইয়াছে। যদি ঐরূপ প্রশ্নে দুইটি অজ্ঞাত রাশি থাকে, তবে ঐ দুই অজ্ঞাত রাশিকে x ও y ধরিয়া প্রশ্নের শর্তগুলিকে দুইটি সমীকরণের আকারে রূপান্তরিত করিতে হইবে। দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণদ্বয়কে সহসমীকরণ বলা হয়। এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া অজ্ঞাত রাশি দুইটি নির্ণয় করা যাইবে।

কোন প্রশ্নে দুইটি অজ্ঞাত রাশি নির্ণয় করিতে হইলে প্রশ্নে দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ শর্ত থাকা চাই। যেমন, যদি বলা হয় দুইটি সংখ্যার যোগফল 7, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করিতে হইবে, তবে এ প্রশ্নে সংখ্যা দুইটি 1 ও 6, 2 ও 5, 3 ও 4 ইত্যাদি হইতে পারে; সংখ্যা দুইটির নির্দিষ্ট কোন মান হয় না। আবার, দুইটি শর্ত যদি এরূপ হয় যে (1) সংখ্যা দুইটির যোগফল 7 এবং (2) উহাদের দ্বিগুণের সমষ্টি 14; তাহা হইলে দুইটি শর্ত পরস্পর নিরপেক্ষ হইল না; প্রথম শর্তটি দ্বিগুণ করিয়াই দ্বিতীয় শর্ত হইল; কার্যতঃ উহারা একটি মাত্র শর্ত হইল। কিন্তু দ্বিতীয় শর্ত যদি এরূপ হয় যে সংখ্যা দুইটির অন্তরফল 3, তাহা হইলে সংখ্যা দুইটির মান স্পষ্টতঃ 5 ও 2 হয়। সুতরাং দুইটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত সমীকরণ সাধ্য হইতে হইলে দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ সমীকরণ চাই। নিম্নে উক্ত প্রকার সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন প্রণালী প্রদত্ত হইল।

§ 36. তুলনামূলক পদ্ধতি (Method of Comparison)

উদাহরণ 1. সমাধান কর: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8\cdots(1) \\ 7x+4y=15\cdots(2) \end{array}\right\}$

(1) হইতে $y=\dfrac{8-2x}{3}\cdots(3)$ এবং (2) হইতে $y=\dfrac{15-7x}{4}\cdots(4)$.

(3) ও (4) তুলনা করিলে দেখা যায় যে, সমীকরণ দুইটির বামপক্ষ সমান; সুতরাং দক্ষিণপক্ষও পরস্পর সমান হইবে। সুতরাং $\dfrac{8-2x}{3}=\dfrac{15-7x}{4}$,

অথবা, $4(8-2x)=3(15-7x)$, অথবা, $32-8x=45-21x$

অথবা, $21x-8x=45-32$, অথবা, $13x=13$, $\therefore\ x=1$.

এখন (3)-এ $x=1$ বসাইলে পাই $y=\frac{8-2\times1}{3}=\frac{8-2}{3}=\frac{6}{3}=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=1$ এবং $y=2.$

[পরীক্ষা : (1)-সমীকরণে $x=1, y=2$ বসাইলে বামপক্ষ $=2+6=8$ এবং (2)-সমীকরণে বামপক্ষ $=7+8=15$ হইল।]

[**দ্রষ্টব্য** : দুইটির অধিক অজ্ঞাতরাশি থাকিলে এই প্রণালী প্রযোজ্য নহে]

প্রশ্নমালা 22

সমাধান কর (Solve) :

1. $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$ **2.** $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ 5x-2y=8 \end{array}\right\}$ **3.** $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=-1 \\ 3x+\ y=\ \ 7 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 11x+13y=-\ 2 \\ 13x+11y=\ \ 50 \end{array}\right\}$ **5.** $\left.\begin{array}{l} 8y=1-5x \\ 12x+26=-5y \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} 2x-3y-17=0 \\ 5x+6y-\ 2=0 \end{array}\right\}$ **7.** $\left.\begin{array}{l} 7x-3y=31 \\ 9x-5y=41 \end{array}\right\}$ [D. B. '34]

8. $x+2y=3=4x-y$ [C. U. '17] **9.** $x-3y=0=20+y-2x$

10. $\left.\begin{array}{l} \frac{7x}{11}+\frac{3y}{8}=\ 8 \\ \frac{5x}{11}-\frac{3y}{4}=22 \end{array}\right\}$ **11.** $2-2(3x-y)=10(4-y)-5x$ $=4(y-x)$

12. $x+5y=36, \frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3}.$ [C. U. '12]

---

§ 37. পরিবর্ত পদ্ধতি (Method of Substitution) :

উদাহরণ। সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} 5x+3y=\ \ 11 \\ 2x-7y=-12 \end{array}\right\}$

প্রথম সমীকরণ হইতে $y=\frac{11-5x}{3}$......(1)

দ্বিতীয় সমীকরণে yএর পরিবর্তে $\frac{11-5x}{3}$ বসাইয়া পাই

$$2x-\frac{7(11-5x)}{3}=-12,$$

বা, $6x-77+35x=-36$, বা, $41x=41$, $\therefore\ x=1.$

এখন (1)-এ $x=1$ বসাইয়া $y=\frac{11-5}{3}=\frac{6}{3}=2.$ $\therefore\ x=1, y=2.$

প্রশ্নমালা 23

সমাধান কর (Solve) :—

1. $\left.\begin{array}{l}5x+6y=28\\4x+11y=41\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}3x+7y=26\\5y+4x=13\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}9x-11y=15\\7x-13y=25\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}15x-4y-6=0\\9x-2y-5=0\end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l}44x+3y-62=0\\20x-9y-4=0\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l}22x+39y-24=0\\15y+14x-24=0\end{array}\right\}$ 7. $\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=\frac{x}{12}-\frac{2y}{3}=4$

8. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{x}{4}-\frac{y}{3}-\frac{3}{20}=0$ 9. $\frac{2x-y}{21}=\frac{x-11}{8}=\frac{y+5}{4}$

10. $\frac{6x+20y}{7}=\frac{36x+16y}{16}=1.$

11. $\frac{2x+2y-3}{5}=\frac{3x-7y+4}{6}=\frac{8y-x+2}{7}$ [C. U. '12]

12. $\frac{x+y}{2}+\frac{3x-5y}{4}=2,\quad \frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1.$ [C. U.]

§ 38. অপনয়ন পদ্ধতি (Method of Elimination)

প্রথম সমীকরণের একটি অক্ষরের সহগ দ্বারা দ্বিতীয় সমীকরণকে গুণ করিয়া এবং দ্বিতীয় সমীকরণের সেই অক্ষরের সহগ দ্বারা প্রথম সমীকরণকে গুণ করিয়া যে দুইটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে তাহাদিগকে যোগ বা বিয়োগ করিলে সেই অক্ষরটি বিলুপ্ত হইয়া অপর অক্ষরের একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে ; ইহাকে সমাধান করিয়া বিলুপ্ত অক্ষরটিরও সমাধান করা যাইবে। নিম্নে এই পদ্ধতির উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ। সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}3x+4y=5\cdots(1)\\5x+12y=3\cdots(2)\end{array}\right\}$

(1)-কে (2)-সমীকরণের x-এর সহগ 5 দ্বারা গুণ করিলে পাই

$$15x+20y=25\cdots(3)$$

(2)-কে (1)-সমীকরণের x-এর সহগ 3 দ্বারা গুণ করিলে পাই

$$15x+36y=9\cdots(4)$$

এখন, (4) হইতে (3) বিয়োগ করিলে পাই $16y=-16$, $\therefore\ y=-1$.

এখন, (1)-এ $y=-1$ বসাইয়া পাই $3x-4=5$, বা, $3x=9$, $\therefore\ x=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=3$, $y=-1$.

প্রশ্নমালা 24

সমাধান কর (Solve) :—

1. $\left.\begin{array}{r} x+4y=10 \\ 3x+5y=23 \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{r} 4x+3y=20 \\ 6x-\ y=\ 8 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 7x-3y=31 \\ 9x-5y=41 \end{array}\right\}$ [D. B. '34] 4. $\left.\begin{array}{r} 6x-5y-\ 7=0 \\ 9x+4y-22=0 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r} 4x-3y-\ 6=0 \\ 7x+3y-27=0 \end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{r} 6x+20y-7=0 \\ 3x-\ 8y-8=0 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} \frac{5}{x}+\ 3y=\ 8 \\ \frac{4}{x}-10y=56 \end{array}\right\}$ [D. B. '39] 8. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1 \\ \frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3 \end{array}\right\}$ [A. U. '23]

9. $\left.\begin{array}{l} \frac{x+2}{7}+\frac{y-x}{4}=2x-8 \\ \frac{2y-3x}{3}+2y=3x+4 \end{array}\right\}$ [P. U. 1892]

10. $25x+63y=\frac{15x+84y}{16}=1$ 11. $\frac{21x+22y}{41}=\frac{24x+66y}{149}=1$

12 $30x+8y-9=0=140x-36y-97.$

§ 39. বজ্রগুণন প্রণালী (Method of Cross Multiplication)

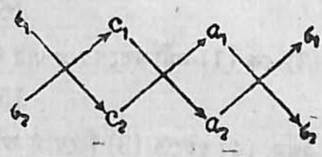
এই প্রণালীটি একটি উপপাদ্যের উপর প্রতিষ্ঠিত। সেই উপপাদ্যটি নিম্নে দেওয়া হইল।

উপপাদ্য। যদি $a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots\cdots(1)$
$a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots\cdots(2)$ হয়,

এবং যদি $a_1b_2-a_2b_1$এর মান শূন্য না হয়, তবে

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ হইবে।}$$

উপরের সিদ্ধান্তটি সহজে মনে রাখিবার জন্য সমীকরণদ্বয়ের সহগগুলিকে নিম্নের আকারে লিখিবে। তারপর তীরচিহ্নক্রমে গুণ করিবে এবং নিম্নগামী গুণফল হইতে ঊর্ধ্বগামী গুণফল বিয়োগ করিবে।



দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত সমীকরণে যদি 3টি অজ্ঞাত রাশি থাকে অর্থাৎ c_1 ও c_2 স্থানে c_1z ও c_2z থাকে, তবে উপপাদ্যটিতে লব 1-এর স্থানে z লিখিবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}2x-3y=\ \ 8\\ 5x+7y=-9\end{array}\right\}$

পক্ষান্তর করিয়া পাই $2x-3y-8=0$

এবং $5x+7y+9=0$

এক্ষণে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x}{(-3\times9)-(7\times-8)}=\frac{y}{(-8\times5)-(9\times2)}=\frac{1}{(2\times7)-(5\times-3)}$$

বা, $\dfrac{x}{-27+56}=\dfrac{y}{-40-18}=\dfrac{1}{14+15}$ বা, $\dfrac{x}{29}=\dfrac{y}{-58}=\dfrac{1}{29}$,

$\therefore\ x=\dfrac{29}{29}=1,\ y=\dfrac{-58}{29}=-2.\ \ \therefore\ x=1,\ y=-2.$

§ 40. আক্ষরিক সহগযুক্ত সমীকরণ।

আক্ষরিক সহগযুক্ত সমীকরণে x, y, z অজ্ঞাতরাশি ধরিতে হইবে এবং a, b, c, l, m, n ইত্যাদি অক্ষরগুলিকে জ্ঞাতরাশি ধরিতে হইবে। উপরে যে তিনটি নিয়মের উদাহরণ দেওয়া হইয়াছে, তাহার যে কোন একটির সাহায্যেই এই প্রকারের সমীকরণগুলির সমাধান হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}ax+by=a-b\cdots(1)\\ bx-ay=a+b\cdots(2)\end{array}\right\}$

$(1)\times a$ করিয়া পাই $a^2x+aby=a^2-ab\cdots(3)$

$(2)\times b$ করিয়া পাই $b^2x-aby=ab+b^2\cdots(4)$

(3) ও (4) যোগ করিয়া পাই, $(a^2+b^2)x=a^2+b^2,\ \therefore\ x=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$

(1)-এ $x=1$ বসাইয়া পাই $a+by=a-b$, বা, $by=-b$,

$\therefore\ y=-1.\ \ \therefore\ x=1,\ y=-1.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+ab}{a}=\dfrac{y+ab}{b}\cdots(1)\\ ax+by=a^3+b^3\cdots(2)\end{array}\right\}$

মনে কর, $\dfrac{x+ab}{a}=\dfrac{y+ab}{b}=k$ (ধর)

$\therefore\ x+ab=ak,\ \ \therefore\ x=ak-ab\cdots(3)$

এবং $y+ab=bk,\ \ \therefore\ y=bk-ab\cdots(4)$

x ও y-এর মান (2)-এ বসাইয়া পাই,

$a(ak-ab)+b(bk-ab)=a^3-b^3$

বা, $a^2k-a^2b+b^2k-ab^2=a^3+b^3$,

বা, $(a^2+b^2)k=a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+b^2),\ \ \therefore\ k=a+b.$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে $\left.\begin{array}{l}x=a(a+b)-ab=a^2\\ y=b(a+b)-ab=b^2\end{array}\right\}.$

প্রশ্নমালা 25

সমাধান কর (Solve) :—

1. $\left.\begin{array}{l}6x-7y-16=0\\9x-5y-35=0\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}3x+4y=11\\5x-2y=1\end{array}\right\}$ [W. B. S. F. '53]

3. $\left.\begin{array}{l}6x-7y-2=0\\7x-9y+1=0\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}x+y=a+b\\ax-by=a^2-b^2\end{array}\right\}$

5. $a(x+y)=b(x-y)=2ab$ [C. U. '30]

6. $\left.\begin{array}{l}ax+by=c^2\\a^2x+b^2y=c^2\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}a(x+y)+b(x-y)=a^2-ab+b^2\\a(x+y)-b(x-y)=a^2+ab+b^2\end{array}\right\}$

8. $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0,\ \frac{ab^2}{x}+\frac{a^2b}{y}=a^2+b^2$

9. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\\ax-by=a^2-b^2\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b\\\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=2\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l}\frac{b}{ax}+\frac{ay}{b}=a+b\\\frac{a}{x}+by=a^2+b^2\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\\ax+by=a^2+b^2\end{array}\right\}$

13. $\frac{x+y}{xy}=5,\ \frac{x-y}{xy}=9$ [C. U. '32]

14. $\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{xy}=2\\\frac{x-y}{xy}=1\end{array}\right\}$ [D. B. '31]

15. $\left.\begin{array}{l}\frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{y}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\\\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=2\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l}\frac{x+a}{2a+b}=\frac{y+2b}{a+b}\\bx+ay=a^2+b^2\end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l}23x+17y=63\\17x+23y=57\end{array}\right\}$

18. $ax+by=1,\ bx+ay=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-1$ [D. B. '51]

19. $\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\bx+ay=1+c\end{array}\right\}$ [E. B. S. B. '52]

20. $\left.\begin{array}{l}(a-b)x+(a+b)y=a^2-2ab-b^2\\(a+b)(x+y)=a^2+b^2\end{array}\right\}$

সহসমীকরণ-সাধ্য প্রশ্নাবলী

§ 41. ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয় :

উদাহরণ 1. কোন একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ এবং হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা 1 হয় ; কিন্তু লবের সহিত হর যোগ এবং হর হইতে লব বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি 6 হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, ভগ্নাংশটি $=\frac{x}{y}$. এখন প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x+1}{y-1}=1\cdots(1)$

এবং দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x+y}{y-x}=6\cdots\cdot(2)$

(1) হইতে পাই $x+1=y-1, \quad \therefore \quad x-y=-2\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $x+y=6y-6x, \quad \therefore \quad 7x=5y, \quad \therefore \quad x=\frac{5}{7}y\cdots\cdot(4)$

(3)-এ $x=\frac{5}{7}y$ বসাইয়া পাই, $\frac{5}{7}y-y=-2$, বা, $-\frac{2}{7}y=-2$.

$\therefore \quad y=7$; $\quad \therefore \quad x=\frac{5}{7}\times 7=5. \quad \therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{5}{7}$.

§ 42. অঙ্ক (Digits) সম্বন্ধীয় :

তোমরা জান যে, 34 সংখ্যায় এককের অঙ্ক 4 ও দশকের অঙ্ক 3, সেজন্য সংখ্যাটি $=3\times 10+4$.

যদি এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y হয়, তবে সংখ্যাটি হইবে $10y+x$. যদি শতকের স্থানে z থাকিত, তবে সংখ্যাটি হইত $100z+10y+x$.

উদা. 2. 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 6 এবং ঐ অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম হইবে। সংখ্যাটি কত? [C. U. '25]

সংখ্যাটি 100 অপেক্ষা কম বলিয়া এখানে উহা দুই অঙ্কের।

মনে কর, এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি $10y+x$, প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=6\cdots(1)$

এবং $10x+y=10y+x-18\cdots(2)$.

(2) হইতে পাই $9x-9y=-18$, বা, $x-y=-2\cdots(3)$

এখন, (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=2$, এবং $y=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10\times 4+2=42$.

উদা. 3. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহার অঙ্কগুলি বিপরীতক্রমে বসাইলে সংখ্যাটি একই থাকে, এবং যাহার অঙ্কগুলির যোগফল 16 এবং অন্তরফল 2.

এখানে স্পষ্টতঃ দশকের অঙ্ক স্থির এবং শতক ও এককের অঙ্ক দুইটি সমান। মনে কর, শতক ও এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক y ; তাহা হইলে সংখ্যাটি হইল $100x+10y+x$.

এখন প্রশ্নানুসারে পাই $2x+y=16$, এবং $x-y=2$.

ঐ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিলে পাই $x=6$, $y=4$. $\therefore$ সংখ্যাটি $=646$.

§ 43. বয়স সম্বন্ধীয় :

উদা. 4. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 50 বৎসর ; যখন পুত্রের বয়স পিতার বর্তমান বয়সের সমান হইবে তখন তাহাদের বয়সের সমষ্টি 102 বৎসর হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, পিতার বর্তমান বয়স x বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স y বৎসর ; সুতরাং প্রথম শর্তানুসারে, $x+y=50 \cdots (1)$

পিতা ও পুত্রের বয়সের অন্তর হইল $x-y$ বৎসর ; সুতরাং $x-y$ বৎসর পরে পুত্রের বয়স হইবে x বৎসর এবং পিতার বয়স হইবে $2x-y$ বৎসর ;

$\therefore$ দ্বিতীয় শর্তানুসারে সমীকরণ হইল

$$x+(2x-y)=102, \text{ অর্থাৎ } 3x-y=102 \cdots (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিলে পাই $4x=152$, $\therefore$ $x=38$,

সুতরাং $y=50-x=50-38=12$.

অতএব, পিতার বয়স 38 বৎসর এবং পুত্রের বয়স 12 বৎসর।

§ 44. নৌকা ও স্রোতের বেগ :

স্থির জলে অর্থাৎ নদীতে স্রোত না থাকিলে নৌকার গতিবেগ যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়। যদি স্রোত থাকে তবে (1) স্রোতের অনুকূলে বা স্রোতের দিকে (with the stream or current, down-stream, down the river) নৌকা যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির সমষ্টি যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়, কিন্তু (2) স্রোতের প্রতিকূলে বা বিপরীত দিকে (against the current, up-stream or up the river) নৌকা যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির অন্তর যত, নৌকা এক ঘণ্টায় ততদূর যায়।

উদা. 5. এক ব্যক্তি স্থির জলে ঘণ্টায় 5 কি. মি. নৌকা বাহিয়া যায়। স্রোতের অনুকূলে 40 কি. মি. যাইতে তাহার যে সময় লাগে স্রোতের প্রতিকূলে 40 কি. মি. যাইতে তাহার 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, স্রোতের গতি ঘণ্টায় x কি. মি., সুতরাং নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $5-x$ কি. মি. এবং স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় $5+x$ কি. মি. যায়। $\therefore$ 40 কি. মি. স্রোতের প্রতিকূলে ও অনুকূলে যাইতে যথাক্রমে $\frac{40}{5-x}$ ও $\frac{40}{5+x}$ ঘণ্টা লাগে।

এখন প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই $\frac{40}{5-x}=3\times\frac{40}{5+x}$, বা, $\frac{1}{5-x}=\frac{3}{5+x}$,

বা, $5+x=15-3x$, বা, $4x=10$, $\therefore\ x=2\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্রোতের গতি ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ কিলোমিটার।

§ 45. বিবিধ :

উদা. 6. 9টি ঘোড়া এবং 7টি গরুর মূল্য 3000 টাকা, এবং একই দরে 6টি ঘোড়া এবং 13টি গরুর মূল্য একত্রে 3000 টাকা। ঐ দরে 5টি ঘোড়া এবং 3টি গরুর মূল্য একত্রে কত টাকা হইবে ?

মনে কর, একটি ঘোড়ার মূল্য x টাকা, এবং একটি গরুর মূল্য y টাকা;

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $9x+7y=3000\cdots(1)$

এবং $6x+13y=3000\cdots(2)$

$(1)\times 2$ করিয়া পাই $18x+14y=6000\cdots(3)$

$(2)\times 3$ করিয়া পাই $18x+39y=9000\cdots(4)$

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $25y=3000$, $\therefore\ y=120$.

(1)এ $y=120$ বসাইয়া $9x+840=3000$, বা, $9x=2160$, $\therefore\ x=240$

$\therefore$ একটি ঘোড়ার মূল্য $=240$ টা. এবং একটি গরুর মূল্য $=120$ টা.

$\therefore$ 5টি ঘোড়া এবং 3টি গরুর মূল্য একত্রে

$=240$ টা. $\times 5+120$ টা. $\times 3=(1200+360)$ টা. $=1560$ টাকা।

উদা. 7. কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 মিটার কমাইলে ক্ষেত্রফল 18 বর্গ মিটার কমিয়া যায়। আবার, দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 মিটার বাড়াইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গ মিটার বাড়ে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

মনে কর, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার,

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=xy$ বর্গ মিটার।

প্রথম শর্তানুযায়ী $(x+3)(y-3)=xy-18\cdots(1)$

দ্বিতীয় শর্তানুযায়ী $(x+3)(y+3)=xy+60\cdots(2)$

(1) হইতে পাই $3y-3x-9=-18$ অর্থাৎ $3y-3x=-9\cdots(3)$

(2) হইতে $3y+3x=51\cdots(4)$. (3)+(4) করিয়া $6y=42$, $\therefore\ y=7$

(3)-এ $y=7$ বসাইয়া $21-3x=-9$, বা, $-3x=-30$. $\therefore\ x=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং প্রস্থ 7 মিটার।

উদা. 8. একই সময়ে একটি ট্রেন কলিকাতা হইতে মধুপুর অভিমুখে এবং অন্য একটি ট্রেন মধুপুর হইতে কলিকাতা অভিমুখে রওনা হয়। উভয় ট্রেনের সাক্ষাৎ হইবার 1 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা পরে ট্রেন দুইটি যথাক্রমে মধুপুর ও কলিকাতা পৌছিল। প্রমাণ কর যে, একটি ট্রেনের গতিবেগ অন্য ট্রেনের গতিবেগের দ্বিগুণ। [C. U. 1946]

মনে কর, প্রথম ও দ্বিতীয় ট্রেনের গতিবেগ যথাক্রমে x ও y কি. মি.। অতএব, উভয় ট্রেনের সাক্ষাতের পর মধুপুরগামী ট্রেন 1 ঘণ্টায় গিয়াছে x কি. মি., এবং কলিকাতাগামী ট্রেন 4 ঘণ্টায় গিয়াছে $4y$ কি. মি.। সুতরাং যখন উভয়ের সাক্ষাৎ হয় তখন সমকালে প্রথম ট্রেন $4y$ কি. মি. এবং দ্বিতীয় ট্রেন x কি. মি. গিয়াছিল। প্রথম ট্রেন ঘণ্টায় x কি. মি. বেগে $4y$ কি.মি. যায় $\frac{4y}{x}$ ঘণ্টায় এবং দ্বিতীয় ট্রেন ঘণ্টায় y কি. মি. বেগে x কি. মি. যায় $\frac{x}{y}$ ঘণ্টায়।

$$\therefore\quad \frac{4y}{x}=\frac{x}{y},\quad \text{বা},\quad x^2=4y^2,\quad \therefore\quad x=2y.$$

$\therefore$ প্রথম ট্রেনের গতিবেগ দ্বিতীয় ট্রেনের গতিবেগের দ্বিগুণ।

প্রশ্নমালা 26

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 52 এবং অন্তরফল 4 ; সংখ্যা দুইটি কত ?

2. দুইটি সংখ্যা এমন যে ছোটটির 3 গুণ বড়টির দ্বিগুণ অপেক্ষা 18 বেশী ; এবং ছোটটির $\frac{1}{3}$ অংশ ও বড়টির $\frac{1}{5}$ অংশ একত্রে 21 হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 80 ; উহাদের অন্তরফলের 3 গুণ বড় সংখ্যাটি অপেক্ষা 20 অধিক। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

4. দুইটি সংখ্যা এমন যে বড়টির $\frac{1}{4}$ অংশ ছোটটির $\frac{1}{6}$ অংশ অপেক্ষা 5 অধিক ; এবং বড়টির $\frac{1}{6}$ অংশ ও ছোটটির $\frac{1}{4}$ অংশ একত্রে 12 হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

5. দুইটি সংখ্যার বড়টির $\frac{1}{5}$ অংশ ছোটটির $\frac{1}{3}$ অংশের সমান। উভয়ের সমষ্টি 16 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

6. কোন ভগ্নাংশের লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে এবং হরের সহিত 3 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{4}$ হয় ; আবার, লবের সহিত 6 যোগ করিলে এবং হরকে 3 গুণ করিলে উহা $\frac{2}{3}$ হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

7. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরে 1 যোগ করিলে উহা $\frac{4}{5}$ হয়, এবং লব ও হর হইতে 5 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [C. U. '16]

8. কোন ভগ্নাংশের লব হইতে 1 বিয়োগ ও হরে 2 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ হয় ; এবং লব হইতে 7 ও হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করিতে হইবে। [C. U. '28]

9. কোন ভগ্নাংশের লব ও হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{2}{3}$ হয় ; আবার লবের সহিত 2 যোগ এবং হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে উহা 1 হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

10. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 9 ; অঙ্কগুলি স্থান বিনিময় করিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 27 বেশী হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

11. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা উহার অঙ্কসমষ্টির তিনগুণ ; অঙ্কগুলি বিপরীতক্রমে বসাইলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্ব সংখ্যার তিনগুণ অপেক্ষা 9 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

12. কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে সংখ্যাটির $\frac{5}{6}$এর সমান হইবে এবং অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 1 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '49]

13. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা এবং ঐ অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া দিলে যে সংখ্যা হয় তাহাদের সমষ্টি 110 এবং উভয় অঙ্কের অন্তর 6 ; সংখ্যাটি কত ? [A. U. '28]

14. ABC ত্রিভুজের $\angle B = 4x$ ডিগ্রি, $\angle C = x$ ডিগ্রি, $\angle A = y$ ডিগ্রি এবং $3\angle A - 5\angle B = 15°$; x ও yএর মান নির্ণয় কর।

15. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle A = (2x+13)$ ডিগ্রি, $\angle B = (2y-18)$ ডিগ্রি, $\angle C = (y+31)$ ডিগ্রি, $\angle D = (3x-29)$ ডিগ্রি। x ও yএর মান নির্ণয় কর। [সংকেত : বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় $= 2$ সমকোণ হয়।]

16. A অপেক্ষা B সাত বৎসরের বড় ; 15 বৎসর পূর্বে Aর বয়স Bর বয়সের $\frac{3}{4}$ ছিল। উভয়ের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

17. পিতা ও তাহার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি 57 বৎসর, একটি পুত্র অপরটি অপেক্ষা 2 বৎসরের বড়। জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়স যখন পিতার বর্তমান বয়সের সমান হইবে, তখন যদি তিনজনই বাঁচিয়া থাকে, তবে তাহাদের বয়সের সমষ্টি 162 বৎসর হইবে। প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত ?

18. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল ; 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

19. তিন বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স 4 বৎসর পূর্বে পুত্রের যত বয়স ছিল তাহার 7 গুণ হইবে। উভয়ের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

20. 5টি টেবিল ও 9 খানি চেয়ারের মূল্য একত্রে 1900 টাকা ; আবার 4টি টেবিল ও 5 খানি চেয়ারের মূল্য একত্রে 1300 টাকা। 3টি টেবিল ও 6 খানি চেয়ারের একত্রে মূল্য কত হইবে ?

21. 5টি ঘোড়া ও 7টি গরুর মূল্য একত্রে 8700 টাকা ; আবার 3টি ঘোড়া ও 4টি গরুর মূল্য একত্রে 5100 টাকা। একটি ঘোড়া ও একটি গরুর মূল্য একত্রে কত হইবে ?

22. এক ব্যক্তি 7টি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া 9টি গরু কিনিলে তাহার তহবিল 176 টাকা বাড়ে, কিন্তু ঐ দরে 9টি ঘোড়া কিনিয়া 13টি গরু বিক্রয় করিলে তাহার তহবিল 182 টাকা কমিত। একটি গরুর মূল্য কত ?

23. দুই জন পুরুষ এবং ছয় জন বালক একটি কাজ 5 দিনে করিতে পারে ; ঐ কাজ 8 জন পুরুষ এবং 3 জন বালক 3 দিনে করিতে পারে। একজন পুরুষ ও 3 জন বালক ঐ কাজ কতদিনে করিবে ?

24. দুই ব্যক্তি পরস্পর $8\frac{1}{4}$ কিলোমিটার দূর হইতে একই সময়ে যাত্রা করিল। যদি তাহারা একই দিকে যায়, তবে তাহারা 11 ঘণ্টায় মিলিত হয় ; কিন্তু যদি পরস্পরের দিকে যায়, তবে 1 ঘণ্টায় মিলিত হয়। উভয়ের গতিবেগ নির্ণয় কর।

25. একখানি নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 44 কি. মি. ও প্রতিকূলে 30 কি. মি. যায় ; আবার, 13 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 55 কি.মি. ও প্রতিকূলে 40 কি. মিটার যায়। স্রোতের বেগ ও নৌকার নিজস্ব বেগ নির্ণয় কর।

26. এক ব্যক্তি স্রোতের সঙ্গে 10 ঘণ্টায় 70 কি. মিটার নৌকা বাহিয়া গিয়া 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। ঘণ্টায় স্রোতের বেগ কত ?

27. কোন ছাত্রকে কোন সংখ্যার সহিত 3 যোগ করিয়া যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিতে বলায়, সে সংখ্যাটি হইতে 2 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 3 দ্বারা গুণ করিল। ইহাতে তাহার উত্তরটি কিন্তু ঠিকই হইল। সংখ্যাটি এবং উত্তরটি কত ?

28. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মি. কম ও প্রস্থ 3 মি. অধিক হইলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গ মিটার কম হয়। আবার, দৈর্ঘ্য 3 মি. ও প্রস্থ 2 মি. বেশী হইলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গ মিটার বেশী হয়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

29. 55 কি. মি. দূরবর্তী দুইটি স্থান হইতে A ও B একই সময়ে যাত্রা করিয়া 5 ঘ. 30 মি. পরে মিলিত হইল। A তাহার গতিবেগ অর্ধেক এবং B দ্বিগুণ করিলে উভয়ে 5 ঘণ্টায় মিলিত হইত। প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।

30. ফুটবল খেলা দেখিতে আমি 16 টাকা খরচ করিতে পারি। যদি প্রতিবার ট্যাক্সি ভাড়া ও প্রবেশমূল্য দিই, তবে আমি আটটি খেলা দেখিতে পারি ; যদি প্রতি তিনবারে একবার হাঁটিয়া যাই, তবে 9টি খেলা দেখিতে পারি। খেলা দেখার প্রবেশমূল্য কত ?

31. কোন আয়তাকার প্রাঙ্গণের পরিসীমা 60 মিটার। উহার দৈর্ঘ্য 3 মিটার অধিক এবং প্রস্থ 3 মিটার কম হইলে উহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গমিটার কম হয়। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

32. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে নৌকা চালাইয়া স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 30 কি. মিটার যায়, স্রোতের প্রতিকূলে উহার 3 গুণ সময়ে ঐ দূরত্ব যায়। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

33. যদি দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 4 গুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ হইবে। [W. B. S. F. '56]

34. B-কে A বলিল, "তোমার বর্তমান বয়সের সমান যখন আমার বয়স ছিল, তখন তোমার যে বয়স ছিল আমার বর্তমান বয়স তাহার দ্বিগুণ।" উভয়ের বর্তমান বয়স মোট 63 বৎসর হইলে তাহাদের বয়স কত ? [A.U. '31]

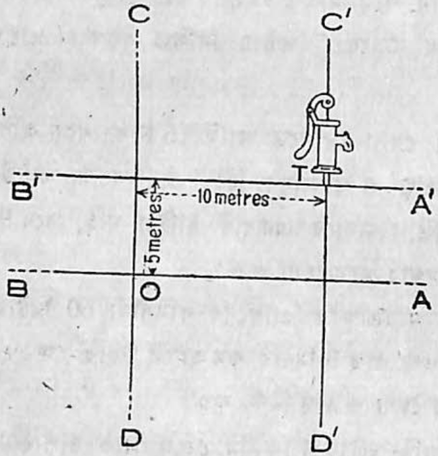
35. এক ব্যক্তি অপরাহ্ণ 3টা ও 4টার মধ্যে গৃহ হইতে বাহির হইয়া 4টা ও 5টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন যে তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন এবং কখন ফিরিয়া আসেন ?

36. দুইটি পাত্রে দুধ ও জল যথাক্রমে 2 : 3 এবং 5 : 4 অনুপাতে মিশান আছে। ঐ দুই মিশ্রিত দ্রব্য কি অনুপাতে লইয়া একত্রে মিশাইলে নূতন মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে ?

সরল সমীকরণের লেখচিত্র

(Graphs of Simple Equations)

§ 46. পাটীগণিতের বিবিধ প্রশ্ন বীজগণিতে সমীকরণের আকারে প্রকাশ করা যায়। এই সমীকরণগুলিকে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ ও সমাধান করা যায়। সুতরাং লেখচিত্র হইল বিভিন্ন ঘটনা, তথ্য বা সমস্যার চিত্ররূপ।



চিত্র নং 1

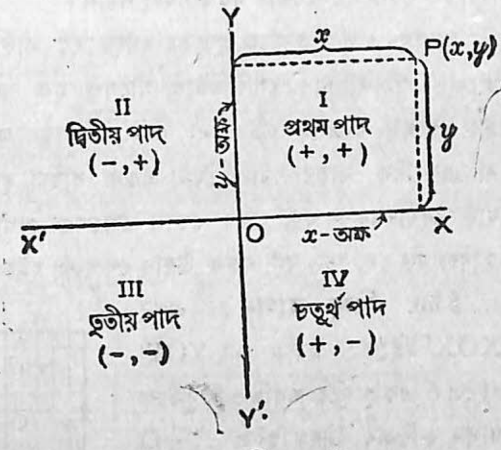
§ 47. 1 নং চিত্রে AB এবং CD রাস্তা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়া একটি চৌমাথার সৃষ্টি করিয়াছে। এই চৌমাথা O হইতে কিছুদূরে T স্থানে একটি নলকূপ আছে। উহা AB রাস্তা হইতে 5 মিটার দূরে এবং CD রাস্তা হইতে 10 মিটার দূরে অবস্থিত। এই তথ্য হইতে নলকূপটির সঠিক অবস্থান জানা যায়।

AB হইতে 5 মিটার দূরে AB-র সমান্তরাল করিয়া A′B′ একটি সরলরেখা এবং CD হইতে 10 মিটার দূরে CD-র সমান্তরাল করিয়া C′D′ একটি সরলরেখা টানিলে সরলরেখা দুইটি যে বিন্দুতে ছেদ করিবে সেই ছেদবিন্দু নলকূপটির অবস্থান নির্ণয় করিবে। সুতরাং চৌমাথা O হইতে BA রাস্তা বরাবর 10 মিটার গিয়া ঐ স্থান হইতে D′C′ সরলরেখা বরাবর 5 মিটার গেলে নলকূপের অবস্থান T-তে পৌঁছান যায়, অথবা চৌমাথা O হইতে DC রাস্তা বরাবর 5 মিটার গিয়া ঐ স্থান হইতে B′A′ সরলরেখা বরাবর 10 মিটার গেলে T-তে পৌঁছান যায়।

এইরূপে সমতলে কোন বিন্দুর অবস্থান দুইটি লম্বভাবে পরস্পর-ছেদী সরল রেখার সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

§ 48. 2নং চিত্রে XOX′ ও YOY′ দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছেদ করিয়াছে। XOX′ রেখাকে **x-অক্ষ** (x-axis) এবং YOY′ রেখাকে **y-অক্ষ** (y-axis) বলে। সাধারণতঃ XOX′ অনুভূমিক (horizontal) রেখা এবং YOY′ উল্লম্ব (vertical) রেখা ধরা হয়। O বিন্দুকে **মূলবিন্দু** (origin) ধরা হয়। দূরত্ব গণনা মূলবিন্দু হইতে আরম্ভ হয়।

x-অক্ষ এবং y-অক্ষ দ্বারা সমতলটি চারিটি অংশে বিভক্ত হয়। প্রত্যেকটি অংশকে এক একটি **পাদ** (quadrant) বলে। XOY কোণের মধ্যে অবস্থিত অংশকে **প্রথম পাদ** (quadrant I), YOX′ কোণের মধ্যে অবস্থিত অংশকে **দ্বিতীয় পাদ** (quadrant II), X′OY′ কোণের মধ্যে অবস্থিত অংশকে **তৃতীয় পাদ** (quadrant III) ও Y′OX কোণের মধ্যে অবস্থিত অংশকে **চতুর্থ পাদ** (quadrant IV) বলে।



চিত্র নং 2

কোন বিন্দু P হইতে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ পর্যন্ত লম্ব টানিলে P হইতে x-অক্ষের দূরত্বকে Pএর **কোটি** (ordinate or y-co-ordinate) এবং P হইতে y-অক্ষের দূরত্বকে Pএর **ভুজ** (abscissa or x-co-ordinate) বলে। কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি এই দুইটি অঙ্ক দেওয়া থাকিলে বিন্দুর সঠিক অবস্থান জানা যায়। এই দুইটি অঙ্ককে বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** বলে। কোন বিন্দুর ভুজ x-একক ও কোটি y-একক হইলে বিন্দুটির স্থানাঙ্ককে (x, y) এইরূপ লেখা হয়।

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0).

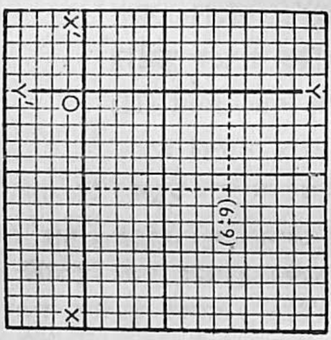
মূলবিন্দু O হইতে x-অক্ষ বরাবর ডানদিকের দূরত্বকে ধনাত্মক এবং বামদিকের দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়। মূলবিন্দু O হইতে y-অক্ষ বরাবর উপরের দিকে দূরত্বকে ধনাত্মক এবং নীচের দিকে দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়। সুতরাং প্রথম পাদে অবস্থিত সমস্ত বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক, দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত সমস্ত বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক, তৃতীয় পাদে অবস্থিত সমস্ত বিন্দুর ভুজ ও কোটি ঋণাত্মক, চতুর্থ পাদে অবস্থিত সমস্ত বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক হয়।

§ 49. **বর্গাঙ্কিত কাগজ** বা **ছক কাগজ** (squared paper or graph paper) :

যে কাগজে পরস্পর সমান্তরাল ও সমদূরবর্তী এক শ্রেণী সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল ও সমদূরবর্তী অপর এক শ্রেণী সরলরেখার সহিত লম্বভাবে ছেদ করিয়া সন্নিবিষ্ট থাকে তাহাকে **বর্গাঙ্কিত** বা **ছক কাগজ** বলে। এই কাগজে প্রথম শ্রেণীর পরপর অবস্থিত দুইটি সরলরেখার দূরত্ব দ্বিতীয় শ্রেণীর পরপর অবস্থিত দুইটি সরলরেখার দূরত্ব সর্বদা সমান।

সাধারণত ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহু $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি বা ·1 ইঞ্চি হইয়া থাকে। মিলিমিটার, সেন্টিমিটার মাপেও ছক কাগজ প্রস্তুত হইতে পারে। ছক কাগজ যেরূপই হউক না কেন, উহার ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রগুলির এক বা একাধিক বাহুর সমান দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া দূরত্ব মাপা হয়। একটি বাহু যদি দৈর্ঘ্য-একক হয়, তবে কোন ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ দুইটি গুণ করিয়া যত হয়, তত বর্গ একক উহার ক্ষেত্রফল হইবে।

§ 50. **বিন্দু স্থাপন :** এখন XOX′ হইতে 9 একক এবং YOY′ হইতে 6 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুটিকে স্থাপন করিবার নিয়ম হইল এই—O হইতে OX বরাবর 6 একক যাইয়া সেখান হইতে উপর দিকে OY -এর সমান্তরালভাবে 9 একক যাইলে যে বিন্দুটি পাওয়া যাইবে সেইটি হইল উক্ত বিন্দুটির অবস্থান। ঐ বিন্দুটির অবস্থান লিখিতে হইলে উহাকে (6, 9) লিখিতে হইবে। প্রথম অঙ্ক 6এর অর্থ OX বরাবর 6 একক গণিতে হইবে এবং দ্বিতীয় অঙ্ক 9এর অর্থ হইল OX বরাবর গণনা শেষ করিয়া সেখান হইতে উপর দিকে OYএর সমান্তরাল রেখা বরাবর 9 একক গণনা করিতে হইবে।



চিত্র নং 3

§ 51. লেখ অঙ্কনে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি সম্বন্ধে অবহিত হইবে :—

(1) XOX′ ও YOY′-অক্ষরেখা দুইটি ছক কাগজে স্পষ্টভাবে অঙ্কিত করিতে হইবে।

(2) সংস্থাপিত বিন্দুটিতে (·) চিহ্ন অথবা ক্ষুদ্র (x) চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিয়া উহার পাশে উহার স্থানাঙ্ক লিখিতে হইবে।

(3) স্কেল অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের যতগুলি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরা হইয়াছে তাহা লিখিতে হইবে।

(4) সর্বোপরি চিত্রটি পরিচ্ছন্ন হওয়া চাই।

এক্ষণে সরল একমাত্রিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের প্রণালী দেখান হইতেছে।

উদাহরণ 1. (1) $x=0$ এবং (2) $y=0$ এই দুইটি সমীকরণের লেখচিত্র আঁকিতে হইবে।

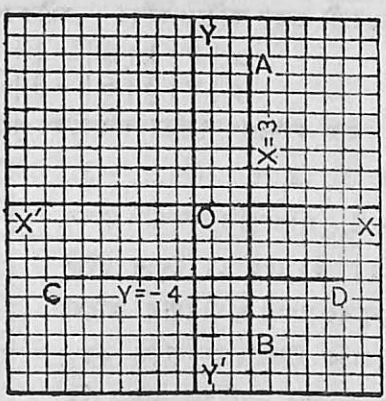
(1) $x=0$ সমীকরণের অর্থ এই যে, একটি চল বিন্দুর সর্বাবস্থানে উহার ভুজ 0 হইলে উহার সঞ্চারপথ কি হইবে। স্পষ্টতঃ y-অক্ষরেখাস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ $=0$; $\therefore$ y-অক্ষরেখাই উহার সঞ্চারপথ এবং YOY′ বা y-অক্ষরেখাই হইবে $x=0$ সমীকরণের লেখচিত্র।

(2) অনুরূপে $y=0$ সমীকরণের লেখচিত্র হইবে x-অক্ষরেখা বা XOX′ রেখা।

উদা. 2. (1) $x=3$ এবং (2) $y=-4$এর লেখচিত্র আঁকিতে হইবে।

(1) $x=3$এর অর্থ এই যে, কোন বিন্দুর সর্বাবস্থানে উহার ভুজ 3 একক হইবে।

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া O হইতে OX বরাবর 3 দৈর্ঘ্য-একক দূরে YOY′এর সমান্তরাল সরলরেখা AB আঁক। এই সরলরেখাস্থ যে কোন বিন্দুর ভুজ 3 একক। সুতরাং ইহাই $x=3$এর লেখচিত্র।



চিত্র নং 4

[**দ্রষ্টব্য :** যদি $x=-3$ হইত, তবে x-অক্ষের negative দিকে অর্থাৎ বামদিকে 3 একক দূরে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাটি লেখ হইত।]

(2) অনুরূপে $y=-4$এর লেখচিত্র হইবে CD সরলরেখা [চিত্র 4 দেখ।]

$y=-4$; এখানে $(1, -4)$, $(2, -4)$, $(5, -4)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখটির উপর থাকিবে। এখানে CD লেখ y-অক্ষের negative দিকে 4 একক দূরে x-অক্ষের সমান্তরাল।

প্রশ্নমালা 27

1. ছক কাগজে নিম্ন স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন কর :—
(0, 3), (0, −4), (5, 0), (−5, 0), (0, 0).

2. ছক কাগজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র দশ বাহুকে দৈর্ঘ্য একক লইয়া নিম্নের বিন্দুগুলি স্থাপন কর :—
(−1·2, 1·6), (−·5, −1·4), (2·9, −3·1)।

3. (0, 6), (8, 0) ও (0, −15) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিসীমা নির্ণয় কর।

4. (0, −5), (·5, −4·5), (1·5, −3·5), (−1·5, 6·5) এই চারিটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত। সরলরেখাটির উপর যে বিন্দুর ভুজ 3·5 তাহার কোটি নির্ণয় কর।

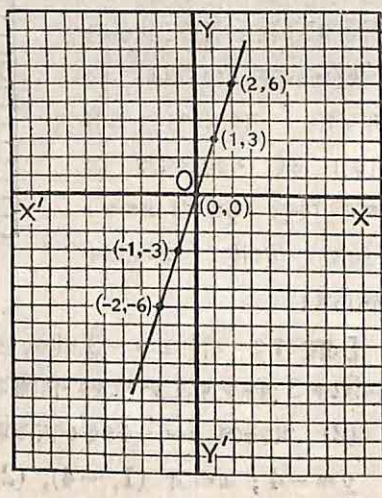
5. *x*-অক্ষ এবং মূলবিন্দু সম্পর্কে (*i*) (2, 3), (*ii*) (3, 4), (*iii*) (2, −3), (*iv*) (−2, −5) বিন্দুগুলির সমঞ্জস প্রতিবিন্দু নির্ণয় কর।

উদাহরণ 3. $y=3x$এর লেখচিত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

প্রথমে yএর বিভিন্ন মান অনুসারে xএর মানের তালিকা নিম্ন আদর্শ অনুযায়ী প্রস্তুত করিতে হইবে। সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	2	−1	−2	···
y	0	3	6	−3	−6	····

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া (0, 0), (1, 3), (2, 6), (−1, −3), (−2, −6) প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ইহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা যোগ করিয়া তাহাকে উভয়দিকে বর্ধিত কর। দেখা যাইবে, অপর বিন্দুগুলিও সেই সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে। আবার, এই সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি (স্থানাঙ্ক) লইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ যে উহাদের দ্বারা $y=3x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং, $y=3x$এর লেখচিত্র হইল একটি সরলরেখা [চিত্র 5]।



চিত্র নং 5

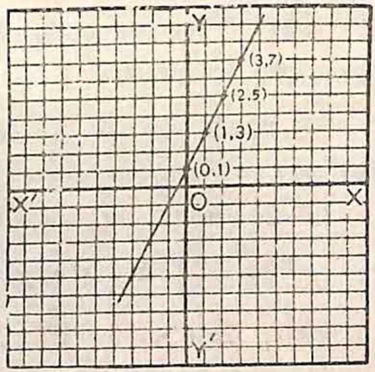
উদা. 4. $y=2x+1$এর লেখচিত্র অঙ্কিত কর।

[এই প্রশ্নটিকে $F(x)=2x+1$ অথবা $2x+1$ এই অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কিত করিতে হইবে—এইভাবেও বলা যাইতে পারে।]

প্রথমে xএর বিভিন্ন মান অনুসারে yএর মানের তালিকা প্রস্তুত করা হইল। সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	2	3	....
y	1	3	5	7	....

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া (0,1), (1,3), (2,5), (3,7) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ইহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া উহাকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে দেখা যাইবে যে অপর বিন্দুগুলিও এই সরলরেখার উপর অবস্থিত। আবার, এই সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং উক্ত সরলরেখাই উক্ত সমীকরণ বা অপেক্ষকের লেখচিত্র হইল। [চিত্র 6 দেখ।]



চিত্র নং 6

উদা. 5. $3x+4y=25$ এবং $4x-3y=0$, ইহাদের লেখ অঙ্কিত কর এবং ইহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '14]

$3x+4y=25\cdots$(i)

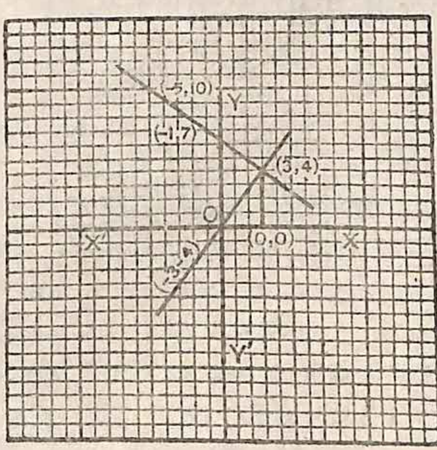
বা, $4y=25-3x$,

$\therefore\ \ y=\dfrac{25-3x}{4}$, ইহা

হইতে

x	3	-1	-5
y	4	7	10

(3, 4), (−1, 7), (−5,10) বিন্দুগুলি দিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে উহাই সমীকরণ-(i)এর লেখ। [চিত্র 7 দেখ।]



চিত্র নং 7

$4x-3y=0\cdots$(ii),

বা, $-3y=-4x$, বা $3y=4x$,

$\therefore \quad y=\frac{4x}{3}$, ইহা হইতে পাই

x	0	3	-3	....
y	0	4	-4	....

(0, 0), (3,4), -3, -4) বিন্দুগুলি দিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে উহাই সমীকরণ-(ii)এর লেখ। উভয়ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য একক $=\cdot1''$. লেখ দুইটি যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (3, 4).

[**দ্রষ্টব্য ঃ** ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে বলিলে দুইটি লেখই একই অক্ষদ্বয় লইয়া আঁকিতে হইবে।]

উদা. 6. $3x-2y=6$ ও $2x+3y=0$ ইহাদের লেখ আঁকিয়া ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1932]

$3x-2y=6\cdots$(i) বা, $-2y=6-3x$, বা, $2y=-6+3x$,

$\therefore \quad y=\frac{-6+3x}{2}$, ইহা হইতে পাই

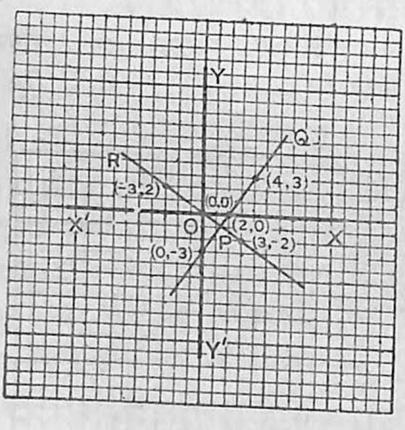
x	0	2	4	....
y	-3	0	3	....

আবার, $2x+3y=0\cdots$(ii) বা, $3y=-2x$,

$\therefore \quad y=\frac{-2x}{3}$, ইহা হইতে পাই

x	0	3	-3	....
y	0	-2	2	....

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল [চিত্র 8 দেখ]।



চিত্র নং 8

লেখ দুইটি P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুতে লেখ দুইটির মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন হইয়াছে, তাহার পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) চাঁদার (Protractor) সাহায্যে মাপিয়া দেখা যায় যে কোণটির মাপ 90° বা এক সমকোণ। অথবা, (2) PR হইতে 3 দৈর্ঘ্য-এককের সমান PA এবং PQ হইতে 4 দৈর্ঘ্য-এককের সমান PB অংশ কাটিয়া লও। এখন মাপিয়া দেখা গেল, AB=5 দৈর্ঘ্য-একক ; সুতরাং $AB^2=25$. আবার, $PA^2+PB^2=3^2+4^2=25$.
$\therefore \quad AB^2=PA^2+PB^2, \quad \therefore \quad \angle P$ সমকোণ।

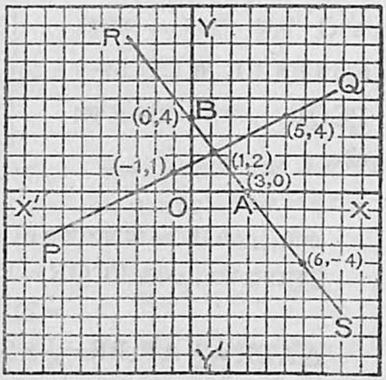
উদা. 7. $\frac{x+3}{2}$ অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর এবং $x=3$ হইলে ঐ অপেক্ষকের মান কত হইবে তাহা লেখ হইতে নির্ণয় কর। x-এর মান কত হইলে ঐ অপেক্ষকটির মান শূন্য হইবে? [D. B. '34]

$\frac{x+3}{2}$এর লেখ এবং $y=\frac{x+3}{2}$এর লেখ একই হইবে। সমীকরণটি হইতে পাই

x	1	-1	5	....
y	2	1	4	....

এখন লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া PQ লেখটি আঁকা হইল [চিত্র 9 দেখ]।

এখন, লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে, $x=3$ হইলে $y=3$ হইবে; এবং প্রদত্ত অপেক্ষকটি বা $y=0$ হইবে যখন $x=-3$.



চিত্র নং 9

উদা. 8. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী উহার অংশটির মাপ নির্ণয় কর। [D. B. '30, '33]

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, বা, $4x+3y=12$, বা, $3y=12-4x$,

$\therefore \quad y=\frac{12-4x}{3}$, ইহা হইতে পাই

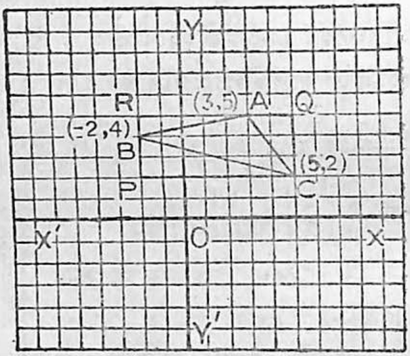
x	0	3	6	....
y	4	0	-4	....

লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া লেখটি আঁক। চিত্র 9এর RS রেখা ঐ লেখ। উহা যেন অক্ষ দুইটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB-র দৈর্ঘ্য মাপিয়া দেখ, AB=5 দৈর্ঘ্য-একক। [অন্যরূপে : $AB^2=AO^2+BO^2=3^2+4^2=25$; $\therefore$ AB=5 দৈর্ঘ্য একক।]

উদা. 9. (3, 5), (−2, 4), (5, 2) এবং (3, 5) বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া

প্রদত্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং উহাদিগকে যথাক্রমে যোগ করিয়া ABC ত্রিভুজটি পাওয়া গেল। এই ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে। A ও C বিন্দু দিয়া x-অক্ষের সমান্তরাল QR ও CP টান এবং B ও C বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল PR ও QC টান। PCQR একটি আয়তক্ষেত্র হইল।



চিত্র নং 10

এখন, $\triangle$ABC = আয়তক্ষেত্র PCQR − $\triangle$ABR − $\triangle$AQC − $\triangle$BPC

উহাদের মধ্যে ক্ষেত্র PCQR = PC × PR = 7 একক × 3 একক

= 21 বর্গ একক ;

$\triangle$ABR = $\frac{1}{2}$ AR.BR = $\frac{1}{2}\times5\times1$ বর্গ একক = $2\frac{1}{2}$ বর্গ একক ;

$\triangle$AQC = $\frac{1}{2}$AQ.QC = $\frac{1}{2}\times2\times3$ বর্গ একক = 3 বর্গ একক ;

$\triangle$BPC = $\frac{1}{2}$BP.PC = $\frac{1}{2}\times2\times7$ বর্গ একক = 7 বর্গ একক ;

$\therefore$ $\triangle$ABC = $(21-2\frac{1}{2}-3-7)$ বর্গ একক = $8\frac{1}{2}$ বর্গ একক ;

= $\frac{17}{2}\times\frac{1}{100}$ বর্গ ইঞ্চি = ·085 বর্গ ইঞ্চি।

[**দ্রষ্টব্য :** ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি, সুতরাং দৈর্ঘ্য-একক = $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি ; $\therefore$ বর্গ একক = $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ বর্গ ইঞ্চি = $\frac{1}{100}$ বর্গ ইঞ্চি। $8\frac{1}{2}$ বর্গ একক বা ·085 বর্গ ইঞ্চি যে কোনটি উত্তর দেওয়া যায়।]

প্রশ্নমালা 28

1. নিম্ন অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অঙ্কিত কর :—

(a) $2x$ (b) $2x-1$ (c) $\frac{1}{2}x$ (d) $\frac{x-1}{2}$.

লেখ অঙ্কিত কর :—

2. $3x-7y=0$ 3. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$. [C. U. '12]

4. (i) $y=x-2$ [C.U. '13] (ii) $y=\frac{3-x}{4}$ [D. B. '32]

5. (i) $y=4x$; (ii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=2$ [C. U. '35]

6. (i) $2y-3x=6$; (ii) $x=5y$; (iii) $5x+3y=8$ [C.U. '40]

7. (*i*) $x=\frac{2y+6}{3}$; (*ii*) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$

(*iii*) $6x-7y=12$ [C. U. '41] (*iv*) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1.$ [C. U. '11]

8. $\frac{2x-3}{2}$ 9. (*i*) $x=-5$; (*ii*) $2x=7$; (iii) $2y=5.$

10. (*i*) $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$; (*ii*) $2x+3y=6$;

(*iii*) $x=7(y+1)$ [C. U. '42]

11. (*i*) $y=2x$; (*ii*) $y=7$; (*iii*) $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1.$ [C. U. '44]

12. $7x-3y=21.$ [C. U. '45]

13. $2y-3x=7$এর লেখ অঙ্কিত কর। $x=2\frac{1}{3}$ হইলে yএর মান কত এবং $y=3\frac{1}{2}$ হইলে xএর মান কত হইবে তাহা ঐ লেখ হইতে নির্ণয় কর :— [W. B. S. F. '53]

14. $\frac{2x+7}{3}$ এই অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর। $x=4$ হইলে ঐ অপেক্ষকের মান কত হইবে এবং xএর মান কত হইলে অপেক্ষকটির মান 0 হয় তাহা ঐ লেখ দেখিয়া নির্ণয় কর। [D. B. '28]

নিম্নের লেখগুলি অঙ্কিত কর এবং ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

15. $x+y=2$ এবং $x-y=0$ [C. U. '28]

16. $3x+4y=25$ এবং $4x-3y=0$ [C. U. '14]

17. $y=2x$ এবং $3x-2y+2=0$ [C. U. '34]

18. $y=5$ এবং $5x+6y=30$ [C. U. '43]

19. $3x-5y=16$ এবং $2x-9y=5.$ [P. U. '20]

20. যদি x ও y সমানুপাতী হয়, তবে নিম্নের তালিকাটি পূরণ কর এবং ইহার সূচক একটি সমীকরণ নির্ণয় করিয়া তাহার লেখ অঙ্কন কর :—

x	6	4	2	$\frac{1}{2}$	0	−2	−4
y		2					

21. নিম্নে একটি শিশুর বয়স অনুসারে উচ্চতার তালিকা দেওয়া হইল উহার একটি লেখ অঙ্কন কর :—

বয়স (বৎসরে)	1	2	3	4	5	6
উচ্চতা (সেন্টিমিটারে)	90	95	100	105	110	115

22. $2x-5y=0$ এবং $5x+2y=7$এর লেখ দুইটি অঙ্কিত করিয়া উহাদের অন্তর্ভূত কোণটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

23. $\frac{x}{5}+\frac{y}{12}=1$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী উহার অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

24. (8, 9), (2, 6), (9, 2) বিন্দুগুলি যোগ করিয়া যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। এখানে ·1 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য-একক ধরিবে।

25. (*i*) $x+y=0$, (*ii*) $3x=5y$ ও (*iii*) $y=3x+12$ এইগুলির লেখ দ্বারা যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

26. (2, 0), (4, 3), (2, 5), (0, 2) ও (2, 0) বিন্দুগুলি পর পর যোগ কর এবং উৎপন্ন চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C.U. '31 Addl.]

27. একটি সঞ্চরমান বিন্দুর সর্ব অবস্থানে কোটির দ্বিগুণ উহার ভুজ অপেক্ষা 3 অধিক। প্রমাণ কর যে, উহার সঞ্চারপথ (3, 3) বিন্দু দিয়া যাইবে এবং লেখ দ্বারা উহা সমর্থন কর।

[Hints : ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা যাহা $2y=x+3$ এই সমীকরণ দ্বারা সূচিত অর্থাৎ উহার লেখ।]

---

§ 5.2. লেখ অঙ্কন দ্বারা প্রশ্ন সমাধান

উদা. 1. এক কিলো গ্রা. চা-এর মূল্য 1 টাকা 50 পয়সা হইলে লেখ সাহায্যে (*i*) 5 কি. গ্রা. চা-এর মূল্য এবং (*ii*) 12 টাকায় কত চা পাওয়া যায় নির্ণয় কর।

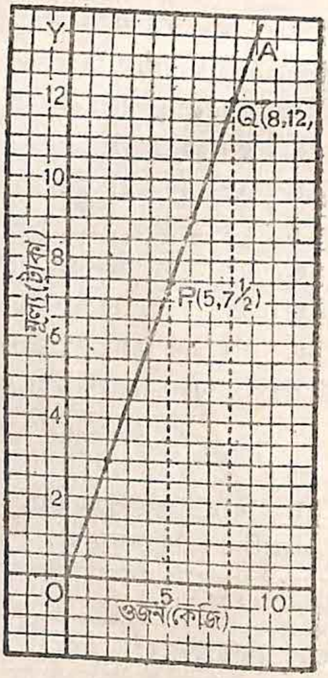
মনে কর, x কিলোগ্রাম ওজনের চায়ের মূল্য y টাকা। এখানে বলা আছে, 1 কিলোগ্রাম চা-এর মূল্য $\frac{3}{2}$ টাকা,

$\therefore$ x কি.গ্রা. চা-এর মূল্য $\frac{3x}{2}$ টাকা।

$\therefore$ $y=\frac{3}{2}x$ হইল এবং ইহাই এস্থলে উদ্দিষ্ট লেখটির সমীকরণ। ইহা হইতে পাই

x	2	4	6	....
y	3	6	9	....

এক্ষণে মনে কর, ছক কাগজে x-অক্ষের উপর অবস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের **একটি** বাহু 1 কি.গ্রা. ওজন এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত অনুরূপ **দুইটি** বাহু 1 টাকা মূল্য সূচিত করে। $y=\frac{3}{2}x$এর লেখ OA আঁকা হইল।



চিত্র নং 11

(*i*) এই লেখটির যে-কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে চায়ের ওজন (কিলোগ্রামে) এবং উহার মূল্য (টাকায়) সূচিত হইবে।]

লেখটি হইতে দেখা যায় যে লেখটির যে বিন্দুর (P) ভুজ 5 একক, তাহার কোটি $= 7\frac{1}{2}$ একক ; সুতরাং 5 কিলোগ্রাম চায়ের মূল্য $7\frac{1}{2}$ টাকা হইল।

(ii) আবার, দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (Q) কোটি 12 একক তাহার ভুজ $=8$ একক ; সুতরাং 12 টাকায় 8 কিলোগ্রাম চা পাওয়া যাইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে OA সরলরেখাকে চায়ের **মূল্য-লেখ** (Price-graph) বলে।]

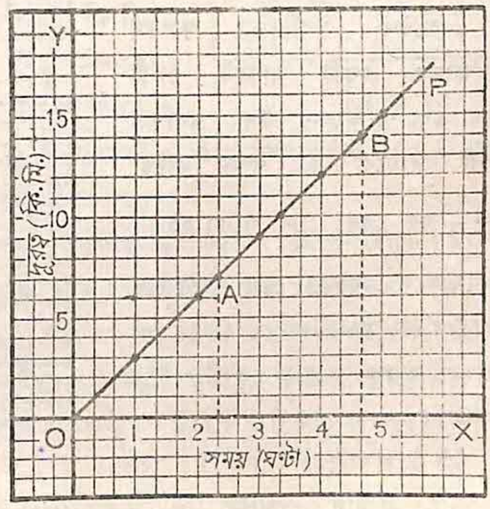
উদা. 2. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 কি. মি. যায়। তাহার গতি-লেখ অঙ্কিত কর এবং তাহা হইতে (i) সে 2 ঘণ্টা 20 মিনিটে কতদূর যাইবে ও (ii) 14 কি. মি. যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

মনে কর. লোকটি x ঘণ্টায় y কি. মি. যায়। এখানে লোকটি 1 ঘণ্টায় 3 কি.মি. যায়, সুতরাং x ঘণ্টায় যায় $3x$ কি.মি.। $\therefore$ y কি.মি. $=3x$ কি.মি.।

$\therefore$ $y=3x$, এই সমীকরণের লেখটি লোকটির **গতি লেখ** (motion graph) হইবে।

মনে কর, ছক কাগজের x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহু 1 ঘণ্টা বা 1টি বাহু 20 মিনিট সূচিত করে এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ 1টি বাহু এক কি. মি. সূচিত করে।

$y=3x$এর লেখ OP আঁকা হইল। OP সরলরেখাই উদ্দিষ্ট গতি-লেখ। এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে গতির সময় ও দূরত্ব সূচিত থইবে।



চিত্র নং 12

(i) 2 ঘ. 20 মি. $=\frac{7}{3}$ ঘণ্টা।

এখানে দেখা যায়, লেখটির যে বিন্দুর (A) ভুজ $=7$ বাহু $=\frac{7}{3}$ একক, তাহার কোটি $=7$ বাহু $=7$ একক। অতএব, লোকটি $\frac{7}{3}$ ঘ. বা 2 ঘ. 20 মিনিটে 7 কিলোমিটার পথ যাইবে।

(ii) আবার দেখা যায় যে, লেখস্থিত যে বিন্দুর (B) কোটি $=14$ একক. তাহার ভুজ $\frac{14}{3}$ একক (14 বাহু) ; সুতরাং 14 কিলোমিটার যাইতে লোকটির $\frac{14}{3}$ ঘ. বা 4 ঘণ্টা 40 মিনিট সময় লাগিবে।

[**দ্রষ্টব্য :** OP লেখটিকে লোকটির **গতি লেখ** (motion-graph) বলে। লোকটি সমবেগে গতিশীল বলিয়া তাহার গতি-লেখ একটি সরলরেখাই হইবে।]

উদা. 3. দুইটি কাঁচা আমের মূল্য 5 পয়সা হইলে লেখ সাহায্যে 5টি কাঁচা আমের মূল্য এবং 20 পয়সায় কয়টি কাঁচা আম পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

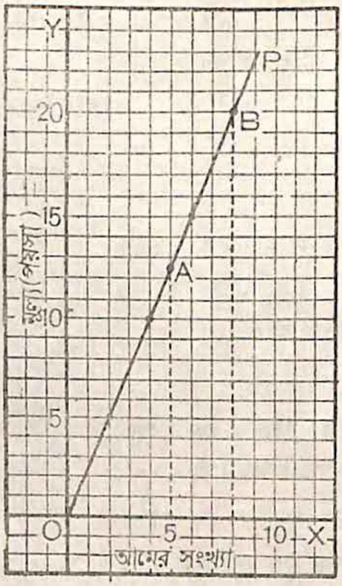
মনে কর, x সংখ্যক আমের মূল্য y পয়সা।

এখানে 2টি আমের মূল্য = 5 পয়সা।

$\therefore$ 1টি আমের মূল্য = $\frac{5}{2}$ পয়সা, $\therefore$ x আমের মূল্য = $\frac{5x}{2}$ পয়সা।

অতএব, এস্থলে $y=\frac{5x}{2}$, এই সমীকরণের লেখটি আমের **মূল্য-লেখ** হইবে।

x-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একটি আম এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত একটি বাহুকে 1 পয়সা ধরিয়া $y=\frac{5x}{2}$এর লেখ OP আঁকা হইল।



চিত্র নং 13

এক্ষণে, লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে (i) এই লেখটির যে বিন্দুর (A) ভূজ = 5 একক, তাহার কোটি = $12\frac{1}{2}$ একক।

$\therefore$ 5টি কাঁচা আমের মূল্য = $12\frac{1}{2}$ পয়সা।

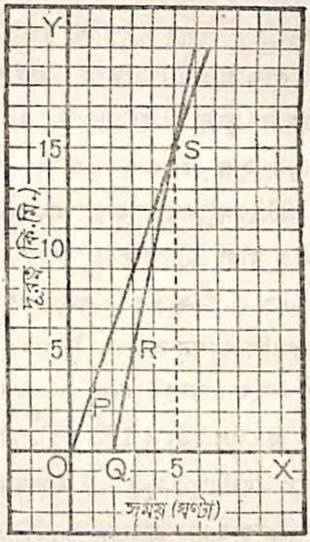
(ii) আবার লেখটির যে বিন্দুর (B) কোটি = 20 একক, তাহার ভূজ = 8 একক ; সুতরাং 20 পয়সায় 8টি কাঁচা আম পাওয়া যাইবে।

উদা. 4. A প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 3 কি. মি. বেগে চলিতে লাগিল এবং 2 ঘণ্টা পরে B তাহার দিকে ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে দৌড়াইতে লাগিল। B কখন ও কোথায় Aকে ধরিবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

মনে কর, x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে 1 ঘণ্টা এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ এক বাহুকে 1 কি.মি. ধরা হইল। মনে কর, O মূল-বিন্দু

হইতে A রওনা হইয়া ঘণ্টায় 3 কি. মি. বেগে চলিতে লাগিল। মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 3), সুতরাং P বিন্দুর ভুজ 1 এককে 1 ঘণ্টা ও কোটি 3 এককে 3 কি. মি. সূচিত করে বলিয়া ঐ বিন্দুটি A-র গতি-লেখস্থিত হইবে। ∴ বর্ধিত OP সরলরেখাই A-র গতিলেখ হইল।

আবার, A রওনা হওয়ার 2 ঘণ্টা পরে B রওনা হইয়াছে বলিয়া ঐ 2 ঘণ্টা B মোটেই চলে নাই ; 2 ঘণ্টা অতীত হইয়াছে বটে কিন্তু তাহার গতি 0 কি.মি.। Q এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (2, 0), সুতরাং OQ রেখা হইবে Bএর ঐ 2 ঘণ্টার (8টা হইতে 10টার) গতি-লেখ। তারপর সে ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে চলিয়াছে। এক্ষণে ঐ Q বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া R এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (1, 5), এক্ষণে বর্ধিত QR সরলরেখাই Bর 2 ঘণ্টার পরবর্তীকালের গতি-লেখ হইল।



চিত্র নং 14

ঐ OP ও QR লেখদ্বয় পরস্পর S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O-কে মূল বিন্দু ধরিয়া Sএর স্থানাঙ্ক হইল (5, 15), ঐ ভুজ 5 এককে 5 ঘণ্টা এবং কোটি 15 এককে 15 কি.মি. সূচিত করে। ∴ Aর রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা পরে বেলা 1টায় এবং যাত্রাস্থল হইতে 15 কি.মি. দূরে A-কে B ধরিতে পারিবে।

উদা. 6. একটি শহরের লোকসংখ্যা নিম্নের তালিকায় দেওয়া হইল :

সাল	1905	1915	1925	1935	1945
লোকসংখ্যা .... (সহস্রে)	15	20	25	30	35

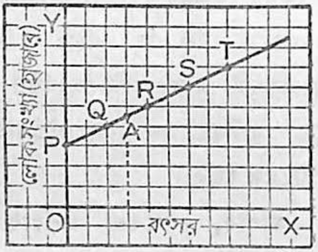
লেখ হইতে ঐ শহরের 1920 সালের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

[Pat. U. '46]

এখানে লোকসংখ্যা সমহারে বর্ধিত হওয়ায় লেখ একটি সরলরেখা হইবে।

মনে কর, x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 5 বৎসর এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ একটি বাহুকে 5 হাজার লোকসংখ্যা ধরা হইল। 1905

সালকে প্রারম্ভিক বৎসর ধরা যাউক। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3) লও, উহার ভুজ=0 দ্বারা প্রারম্ভিক সাল 1905 এবং কোটি=3 দ্বারা 15 (3×5) হাজার বুঝাইল। এখন যে-বিন্দু 1915 সালের লোক-সংখ্যা 20 হাজার নির্দেশ করিবে তাহার স্থানাঙ্ক হইবে (2, 4); কারণ, উহার ভুজ 2 একক দ্বারা 10 বৎসর (1905 সালের পর) এবং কোটি 4 একক দ্বারা 20 হাজার লোক বুঝাইবে, উহাকে Q বিন্দু ধর। অনুরূপে ছক কাগজে R (4, 5), S (6, 6), T (8, 7) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের দ্বারা যথাক্রমে 1925, 1935, 1945 সালের লোকসংখ্যা সূচিত হইল। অতএব PT সরলরেখাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল।



চিত্র নং 15

ঐ লেখ হইতে 1920 সালের লোকসংখ্যা নির্ণয় করিবার জন্য দেখিতে হইবে, যে-বিন্দুর ভুজ=3 একক (1920 − 1905=15 ব.=3 একক), তাহার কোটি কত। এখানে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 4\frac{1}{2})$, সুতরাং উহার কোটি $4\frac{1}{2}$ একক দ্বারা $(5 \times 4\frac{1}{2})$ হাজার বা 22500 লোক বুঝায়।

∴ 1920 সালের লোকসংখ্যা=22500.

প্রশ্নমালা 29

1. এক ব্যক্তি সাইকেলে 20 কিলো মিটার ভ্রমণ করিবার জন্য প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে যাইতে লাগিল। ঐ পথ যাইতে দূরত্ব ও সময়ের সম্বন্ধসূচক একটি লেখ অঙ্কিত কর।

2. যদি 2টি লেবুর মূল্য 30 পয়সা হয়, তবে (1) 7টি লেবুর মূল্য ও (2) 1 টাকা 50 পয়সায় কয়টি লেবু পাওয়া যাইবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

3. এক ব্যক্তি সাইকেলে 30 কি. মিটার ভ্রমণ করিবার জন্য প্রাতে 6টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 3 কি. মি. বেগে যাইতে লাগিল। ঐ পথ যাইতে দূরত্ব ও সময়ের সম্বন্ধসূচক একটি লেখ অঙ্কিত কর।

4. যদি 5টি লেবুর মূল্য 25 পয়সা হয়, তবে (1) 12টি লেবুর মূল্য ও (2) 1 টাকা 10 পয়সায় কয়টি লেবু পাওয়া যাইবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর

5. এক ব্যক্তি প্রাতে 10টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে চলিতে লাগিল। 2 ঘণ্টা পরে তাহার পুত্র ঘণ্টায় 7 কি. মি. বেগে সাইকেলে তাহার দিকে যাইতে লাগিল। তাহারা কখন ও কোথায় মিলিত হইবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর। [A. U. '43]

6. কোন কর্মচারীর বেতন প্রতি বৎসর নির্দিষ্ট পরিমাণে বৃদ্ধি পায়। 5 বৎসর চাকরির পর তাহার বেতন 120 টাকা এবং 12 বৎসর পরে 176 টাকা হয়। এরূপ একটি লেখ অঙ্কিত কর যাহা হইতে তাহার যে-কোন বৎসরের বেতন নির্ণয় করা যায়। ঐ লেখ হইতে তাহার প্রারম্ভিক বেতন ও একবিংশতিতম বৎসরের বেতন নির্ণয় কর। [D. B. '45]

7. একটি স্থানের লোকসংখ্যার তালিকা নিম্নে প্রদত্ত হইল। লেখ সাহায্যে ঐ স্থানের 1945 সালের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

সাল	1920	1930	1940	1950
লোকসংখ্যা (সহস্রে)	12	17	22	27

8. 1957 সালের বিভিন্ন মাসে চাউলের কুইন্ট্যাল প্রতি গড় বাজার দর নিম্নের তালিকায় দেওয়া আছে। রৈখিক চিত্রের সাহায্যে এই তথ্য প্রকাশ কর।

1957	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	June	July	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
চাউলের দাম	23.50	23.00	23.75	24.25	24.00	25.25	25.75	26.00	26.25	28.00	27.75	23.75

9. কোন টাকার বিভিন্ন বৎসরে সরল সুদের তালিকা নিম্নে প্রদত্ত হইল :—

বৎসর	1	3	5	7	10
সুদ (টাকায়)	5	15	25	35	50

তালিকা হইতে লেখ চিত্র অঙ্কিত করিয়া নিম্নের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(i) 2 বৎসর অন্তে কত সুদ হইবে ? (ii) 9 বৎসরের সুদ কত ? (iii) কত বৎসর অন্তে (*a*) 40 টা., (*b*) 45 টা., (*c*) 60 টাকা, (*d*) 57 টা. 50 প. সুদ হইবে ?

10. একটি রোগীর সকাল হইতে বিভিন্ন সময়ে শরীরের তাপ পরিমাণের একটি তালিকা দেওয়া হইল। উহা প্রকাশ করিয়া একটি লেখ অঙ্কিত কর।

সময়	6 টা	8টা	10টা	11টা	12টা
তাপ	99°	100°	102°	102·5°	101°

11. বার্ষিক 4% হার সুদে 100 টাকা সুদে-মূলে যত টাকা হয় তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহার লেখ অঙ্কন করিয়া 12 বৎসরে সবৃদ্ধিমূল কত হইবে নির্ণয় কর।

বৎসর	0	3	8	10	15
সবৃদ্ধিমূল	100 টা.	112 টা.	132 টা.	140 টা.	160 টা.

12. কোন বস্তুকে বাধাহীনভাবে উপর হইতে ছাড়িলে উহা কতক্ষণে কতদূর পতিত হয় তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহার লেখ অঙ্কন কর এবং তাহা হইতে উহা $2\frac{1}{4}$ সেকেণ্ডে কতটা পড়িবে তাহা নির্ণয় কর।

সময় (সেকেণ্ডে)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3
দূরত্ব (মিটারে)	4	9	16	36	64	144

13. ঘড়ির দোলক (pendulum) 1, 4, 9, 16 সে. মিটার দীর্ঘ হইলে উহার একবার দোলনের সময় লাগে যথাক্রমে 1·1, 2·2, 3·3 ও 4·4 সেকেণ্ড। উহার লেখ অঙ্কন করিয়া 25 সে. মিটার দীর্ঘ দোলকের একবার দোলনের সময় নির্ণয় কর।

14. 6 মিটার উচ্চ একটি তৈলাক্ত খুঁটির উপর উঠিতে গিয়া একটি বানর এক সেকেণ্ডে 2 মিটার করিয়া উঠে এবং পর সেকেণ্ডে 1 মিটার নামিয়া পড়ে। এইভাবে সে কতক্ষণে খুঁটির মাথায় পৌঁছিবে তাহা লেখ অঙ্কনের দ্বারা নির্ণয় কর।

বিবিধ প্রশ্নমালা 30

1. $6x^3-8x^2-40x+30$ এবং $2x^2-x-15$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [S. F. '65

2. $2x^2-9x-9$, $6x^2-x-12$ এবং $3x^2-2x-8$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর। [S. F. '65]

3. $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। [S. F. '65]

4. সমাধান কর : $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2x-4}{x+2}=5.$ [S. F. '66]

5. সমাধান কর : $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$

6. সমাধান কর : $\frac{57}{x+y}+\frac{6}{x-y}=5,\ \frac{38}{x+y}+\frac{21}{x-y}=9.$ [A. U. '64]

7. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=0.$$ [S. F. '65]

8. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

9. $a+2b+3c=0$ হইলে $\frac{2c}{a+c}-\frac{a}{b+c}$এর মান কত ?

10. $a+\frac{1}{b}=1$ এবং $b+\frac{1}{c}=1$ হইলে দেখাও যে $c+\frac{1}{a}=1$ এবং $abc+1=0.$ [S. F. '72]

11. $x=\frac{4ab}{a+b}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2.$$ [S. F. '66]

12. $(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)$কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর। [S. F. '66]

13. প্রমাণ কর যে চারিটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফল প্রথম সংখ্যার সহিত দ্বিতীয় সংখ্যাটির বর্গের সমষ্টির যে বর্গ তাহা অপেক্ষা 1 কম।

14. 8 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ হইবে এবং 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 9 গুণ ছিল। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

15. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককের অঙ্কটির 3 গুণ দশকের অঙ্কটির 4 গুণ অপেক্ষা 1 বেশী। অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করিলে যে সংখ্যাটি হয় তাহা পূর্বের সংখ্যাটি অপেক্ষা 9 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [S. F. '71]

16. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 1, উহাদের একটির 3 গুণের সহিত দ্বিতীয়টি যোগ করিলে যোগফল 3 হয়। লেখ সাহায্যে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

17. এক ব্যক্তি এক প্রকার মেষ প্রতিটি 24 টাকা দরে এবং অন্য এক প্রকার মেষ প্রতিটি 32 টাকা দরে সমান সংখ্যায় ক্রয় করিয়া দেখিল যদি সে প্রত্যেক প্রকার মেষের জন্য সমান টাকা ব্যয় করিত তাহা হইলে সে তিনটি মেষ বেশী কিনিতে পারিত। সে প্রত্যেক প্রকারের কয়টি করিয়া মেষ ক্রয় করিয়াছিল ?

18. $x+y=6$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কন করিয়া প্রমাণ কর যে লেখটি এবং অক্ষদ্বয় মিলিয়া একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। ঐ ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

19. 77কে এমন তিনটি সংখ্যায় বিভক্ত কর যাহাতে প্রথম ও দ্বিতীয় সংখ্যার সমষ্টির 3 গুণ, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যার সমষ্টি অপেক্ষা 3 কম এবং প্রথম ও তৃতীয় সংখ্যার যোগফল অপেক্ষা 3 বেশী হয়। [A. U. '66]

20. এক ব্যক্তি তাহার জন্মদিনে 20 টাকা ভিক্ষুকদিগকে সমানভাবে বিতরণ করিল। ভিক্ষুকের সংখ্যা 10 বেশী হইলে প্রত্যেকে 10 পয়সা কম পাইত। ভিক্ষুকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

21. নিম্নের তালিকাটি সম্পূর্ণ করিয়া $y=\frac{1}{4}x$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর :

x	$y=\frac{1}{4}x$	y	(x, y)
-8	$y=\frac{1}{4}\times(-8)$	-2	$(-8,-2)$
-4			
0			
12			

22. একটি ঝিলের জলে কয়েকটি পদ্ম ফুটিয়াছিল। কয়েকটি মৌমাছি তাহাদের উপর বসিতে গিয়া দেখিল যদি তাহারা প্রত্যেকটি পদ্মে দুইটি করিয়া বসে তবে 1টি পদ্ম কম পড়ে। আর যদি প্রত্যেক পদ্মে 3টি করিয়া বসে তবে 1টি পদ্ম খালি থাকে। কয়টি পদ্ম ও কয়টি মৌমাছি ছিল ?

23. 1 ইঞ্চি $=2\cdot5$ সেন্টিমিটার ধরিয়া এমন একটি লেখ অঙ্কিত কর যাহা হইতে ইঞ্চি-সংখ্যাকে সেন্টিমিটার সংখ্যায় পরিণত করা যায় এবং উহা হইতে 8 সে. মিটার কত ইঞ্চির সমান তাহা নির্ণয় কর। [G. U. '70]

24. নীচের ছকে একটি দিনের বিভিন্ন সময়ের তাপমাত্রা দেওয়া আছে, উহা হইতে একটি সময়-তাপমাত্রা লেখ অঙ্কিত কর এবং ঐ লেখ হইতে সকাল 9টায় ও বিকালে 1টায় তাপমাত্রা নির্ণয় কর :

সময়	প্রাতে 6টায়	প্রাতে 8টায়	প্রাতে 10টায়	দুপুর 12টায়	অপরাহ্ণ 2টায়	অপরাহ্ণ 4টায়
তাপমাত্রা	80°	82·4°	85·2°	88·8°	94°	90·2°

॥ উত্তরমালা ॥

পাটীগণিত

প্রশ্নমালা 1

1. 12 টা., 16 টা., 72 টা., 80 টা. 2. ·14

নিম্নগ মান অনুসারে লিখিত :—

3. 8 : 12, 6 : 14, 5 : 25 4. $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$, 3 : 5, $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$

5. ক্রমানুসারে লিখিত আছে

6. 1 মি. 53 সে. মি. : 2 মি. 7 সে. মি., 12 গ্রা. : 18 গ্রা., 6টা. : 10 টা.

7. 20 8. 50 9. 4 টা. 70 প. 10. 1 মিটার 11. 132 টা.

12. 21 ব. 13. 9 : 10 14. A 198 টা., B 126 টা. 15. 75 : 58

16. 25 : 18 17. 18°, 63°, 99° 18. 3 : 13, 1 : 8.

19. $\frac{1}{80000000}$. 20. ঘণ্টায় 70 কি. মি. 21. 27 : 22

22. $917\frac{47}{109}$ গ্রাম 23. 91 : 120 24. 8 : 9 25. 7 : 2.

প্রশ্নমালা 2

1. (*i*) হাঁ, (*ii*) না, 2. 12 3. 30 4. 12 পয়সা 5. $\frac{1}{9}$ 6. 18

7. 14 8. 32 মিটার 9. 27 10. $3\frac{9}{128}$ 11. ·2025

12. 2ঘ. 5 মি. 13. 15 14. 6 15. 15 টা. 16. 45

17. $3\frac{1}{7}$ 18. 2·8 গ্রাম 19. 18 20. (*i*) হাঁ, (*ii*) না, (*iii*) হাঁ

21. (*i*)

x	3	6	12	24	48
y	2	4	8	16	32

(*ii*)

x	3	6	12	24	48
y	32	16	8	4	2

22. 45 মি. 23. না, 40 24. 63 25. $26\frac{2}{3}$ সে., 40 সে., 1 মি. 20 সে.

26. 60 27. $67\frac{1}{2}$ দিন 28. 9 : 13

29. 20 : 63 ; 40 : 60 : 105 : 126 30 1 : 2, 15 বৎসর

31. 13 মি. 2 ডেসি মি. 32. 45, 60

33. রাম 600 টা., হরি 800 টা. 34. 115, 184

35. A 20 ব., B 25 ব. 36. A 48 ব., B 60 ব. 37. 5 : 6

38. 1680 টাকা 39. 16 : 15 40. 9·8 লিটার 41. 2·1 লিটার

42. $1 \propto \frac{1}{d^2}$ 43. $9(\sqrt{3} - 1)$ ডেসি মিটার।

প্রশ্নমালা 3

1. 78 টাকা 2. 6 জন 3. 8 গ্রাম 4. 820 টাকা
5. 55 জন 6. 1000টি 7. 10 ঘণ্টা।

প্রশ্নমালা 4

1. (i) 9 কি. লি. (ii) 24 টাকা 2. 200, 250, 300
3. 80 টা., 200 টা., 60 টা. 4. বালি 462, পাথরকুচি 231 বস্তা
5. 360 6. A 80 টা., B 120 টা., C 150 টা.
7. A 210 টা., B 150 টা., C 90 টা.
8. যথাক্রমে 480 টা., 400 টা., 300 টা. 9. যথাক্রমে 162, 108, 72
10. যথাক্রমে 8000 টাকা, 3000 টাকা, 2400 টাকা
11. যথাক্রমে 80, 50, 30 12. যথাক্রমে 112 টা., 128 টা., 160 টা.
13. 24 সে. মি. 14. যথাক্রমে 60, 160, 400 15. 36 সে. মি.
16. যথাক্রমে 45, 50, 55 বৎসর 17. 700 টা.
18. প্রথম বালক 15 পয়সা, দ্বিতীয় বালক 6 পয়সা
19. যথাক্রমে 348 টা., 290 টা., 232 টা.
20. পুরুষ 60 টা., স্ত্রীলোক 40 টা., বালক 15 টাকা.
21. প্রত্যেক পুরুষ 4 টা. 10 প., স্ত্রীলোক 2 টাকা $73\frac{1}{3}$ পয়সা এবং বালক 2 টা. 5 প. 22. 33 কি. গ্রা. 6 হে. গ্রাম।

প্রশ্নমালা 5

1. 391 টা., 529 টা., 1311 টা. 2. A 32 টা., B 40 টা.
3. যথাক্রমে 400 টা., 500 টা., 600 টা. 4. 400 টা.
5. 480 টা. 6. A 160 টা., B 240 টা., C 600 টা.
7. A 120 টা., B 108 টা., C 112 টা.
8. A 288 টা., B 270 টা., C 216 টা., D 126 টা.
9. A 1386 টা., B 693 টা., C 2079 টা.
10. A 250 টা., B 270 টা. 11. A 32 টা. 50 প., B 29 টা. 25 প.
12. 736 টা. 13. 1500 টা. 14. A 230 টা., B 300 টা.
15. 5 মাস 16. 4 মাস পরে।

প্রশ্নমালা 6

1. 139 টা. 2. 1 টা. 75 প. 3. 4 : 1 4. 80 টা.
5. 1 টা. 25 প. 6. 3 : 4 7. 7 : 17 8. $\frac{1}{8}$ অংশ
9. $16\frac{1}{4}$ মিলি. লি. 10. $\frac{2}{5}$ 11. সোনা : তামা : : 3 : 7
12. 44 : 91 13. $5\frac{2}{5}$ লিটার 14. (i) 1000 গ্রা. (ii) 937·5 গ্রা.
15. 512 : 217 16. 15 : 1 17. 1 টা. 25 প.।

প্রশ্নমালা 7

1. $\frac{1}{20}$ 2. $\frac{3}{25}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$ 5. $\frac{1}{8}$
6. $\frac{1}{30}$ 7. $\frac{11}{20}$ 8. $\frac{3}{4}$ 9. $\frac{2}{5}$ 10. $\frac{1}{16}$
11. $\frac{1}{7}$ 12. $\frac{1}{12}$ 13. $\frac{2}{15}$ 14. $\frac{1}{6}$ 15. $\frac{3}{16}$
16. $\frac{1}{3}$ 17. $\frac{4}{15}$ 18. $\frac{1}{45}$ 19. $53\frac{1}{3}$% 20. 210%
21. 725% 22. 12·5% 23. 5% 24. $33\frac{1}{3}$% 25. $16\frac{2}{3}$%
26. 36 টা. 27. 24 কুই. 50 কি. গ্রা. 28. 1 টা. 51 প.
29. 3 হে. গ্রা. 3 ডে. গ্রা. 30. 9 লিটার 31. 50 মি. 3 সে. মি.
32. $833\frac{1}{10}$: 100 33. 95% 34. 2560 টা.
35. 60 কি. গ্রা. 36. 75 টা. 37. 25%
38. সোরা 650 কি. গ্রা., কয়লা 200 কি. গ্রা., গন্ধক 150 কি. গ্রা.
39. 20% 40. 25% 41. $66\frac{2}{3}$% 42. 4000 43. 700
44. 45 ডে. গ্রা. 45. $42\frac{6}{7}$% 46. 4840 টা. 47. 3500000
48. 4% কম 49. (1) 30টি, (2) 34টি 50. 2500 টা.
51. 200 52. 75 প. 53. 9016 টা. 80 প.
54. 72 প. 55. 21% 56. 42, 33
57. 7500 পুরুষ, 12500 স্ত্রীলোক 58. 88% 59. 2200
60. 380 61. 23% 62. 44% 63. 200
64. 128 টা. 65. 5400 66. 150 67. 80000 টা.
68. ·25% কমিল 69. 3700 70. 1% হ্রাস
71. 3885 টা., 4494 টা. 72. $16\frac{2}{3}$%. 73. 150
74. 3 : 1 75. 150% 77. $11\frac{1}{9}$% 78. 21% লাভ
79. 2 বৎসর 80. 5 : 3 81. $5\frac{5}{7}$%
82. 380·82 গ্রাম, 208·56 গ্রাম 83. 10% 84. 1000
85. 80% 86. 3600 টা. 87. $4\frac{1}{6}$%
88. $57\frac{1}{7}$%, $28\frac{4}{7}$%, $14\frac{2}{7}$% 89. 15 কি. গ্রা. 600 গ্রা.
90. 88 : 5 91. 1·6 হেক্টর 92. A 1010 টা., B 450 টা., C 640 টা.
93. ঘোড়া 400 টাকা, গাড়ী 300 টাকা 94. 6000 জন
95. 6200, 2914, 2606 96. 1,450,000
97. 2 টা. 5 আনা, 2 টা. 13 আনা 98. 12 কপি
99. ডিম, মাছ, মাংস, দুধ 100. $44\frac{4}{9}$%.

প্রশ্নমালা 8

1. 17100 টা. 2. 1335 টা. 60 প. 3. 24000 টা.
4. 7000 টা. 5. 20000 টা. 6. 22,500 টা. 7. $4\frac{1}{6}$%
8. 125 টা. 9. ধার্য মজুরীর উপর 10%. 10. 20%

প্রশ্নমালা 1

1. $x^3+y^3+z^3-3xyz$. 2. $1-x^3$. 3. $a^3+2ab-ab^2+b-1$.

4. $a^8+a^4b^4+b^8$. 5. $a^3+b^3-1+3ab$.

6. $-6a^6-9a^5+19a^4+4a^3-11a^2+8a-5$. 7. x^8+x^4+1.

8. $4x^2+3x+1$. 9. $x^2+y^2+a^2$.

10. $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc$. 11. $(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)$.

প্রশ্নমালা 2

1. 1 2. $a=5, b=3$; অথবা $a=3, b=5$ 3. ±5

4. 1 5. 9 6. 1 7. 7 8. 18 9. p^2-2

10. 2 11. ±1 12. ±5 14. 0, 15. ±5 16. 69

17. 25 18. 6 19. $(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{a-b}{2})^2$ 20. $(x+z)^2-(y-z^2)$

21. $(2a+b+c)^2-(b-a-c)^2$ 22. $(a+b)^2-(b+c)^2$

23. $(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$ 24. $\frac{1}{6}$ 25. 0 26. 34.

প্রশ্নমালা 3

1. 110 2. 4 5. 35 6. 125 7. p^3-3p 9. 2

10. 0 12. 8 13. 39 16. 4 17. 7904 18. 1048.

প্রশ্নমালা 4

1. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$ 2. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$

3. $(9x^2+12xy+8y^2)(9x^2-12xy+8y^2)$

4. $9(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ 5. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

6. $(a^2+ay+y^2)(a^2-ay+y^2)$

7. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

8. $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

9. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)$

10. $(p^2+2p+3)(p^2-2p+3)$

11. $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$

12. $(2x^2y^2+2xy-3)(2x^2y^2-2xy-3)$

13. $(2x^2+10x+25)(2x^2-10x+25)$

14. $(3y^2+3y-4)(3y^2-3y-4)$

15. $(3a^2+5a+4)(3a^2-5a+4)$

16. $(2x^2+3x+5)(2x^2-3x+5)$

17. $(2x^2+2x-5)(2x^2-2x-5)$

18. $(2x^2+6x+5)(2x^2-6x+5)$ 19. $(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)$

20. $(x^2+4x+12)(x^2-4x+12)$

21. $\{(a+b)^2+2(a+b)+2\}\{(a+b)^2-2(a+b)+2\}$

22. $(x-z)(x-2y+z)$ 23. $(2a+3b+c)(2a-3b-c)$

24. $(6x-y+z)(6x-y-z)$

25. $(2p+3q+5r+1)(2p+3q-5r-1)$

26. $(4x+4y-3z-3)(4x-4y+3z-3)$

27. $(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 28. $(2x+y-z)(2x-3y+z)$

29. $(2a+c)(2a-2b-c)$ 30. $(3a-b-c)(a-b+c)$.

প্রশ্নমালা 5

1. $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ 2. $(2a-3)(4a^2+6a+9)$

3. $(x+1)(x^2-x+1)$ 4. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$

5. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ 6. $3(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

7. $(ab-xy)(a^2b^2+abxy+x^2y^2)$

8. $(4p-5q)(16p^2+20pq+25q^2)$ 9. $x(x-1)(x^2+x+1)$

10. $4(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ 11. $(4x-y^2)(16x^2+4xy^2+y^4)$

12. $(x-y-z)(x^2+y^2-2xy+xz-yz+z^2)$ 13. $2a(a^2+3)$

14. $(3x+2y)(3x^2+13y^2+9xy)$

15. $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

16. $(x-2y+2z)(x^2+2xy-2xz+4y^2+4z^2-8yz)$

17. $(x+3)(x^2+3x+3)$ 18. $(3a+2)(21a^2-12a+4)$

19. $(a-b)(2a^2+5ab+8b^2)$ 20. $(2a+1)(2x-1)^2$.

প্রশ্নমালা 6

1. $(x+5)(x-4)$ 2. $(x-2)(x-10)$ 3. $(x-10)(x+2)$

4. $(x-20)(x+1)$ 5. $(1-9x)(1+4x)$ 6. $(1+9x)(1-4x)$

7. $(x-6)^2$ 8. $(x-18)(x+2)$ 9. $(x-9)(x+8)$

10. $(x-27)(x+3)$ 11. $(x-13)(x-7)$ 12. $(a-18)(a+5)$
13. $(x-12)(x+11)$ 14. $(x-16)(x+9)$ 15. $(x-13)(x+12)$
16. $(x-21)(x+20)$ 17. $(x-13y)(x+3y)$
18. $(ab-14c)(ab+13c)$ 19. $(a+1)(a-1)(a^2+5)$
20. $(x+1)(x-1)(x^2+3)$ 21. $(x^2-2)(x^2-8)$
22. $(x^3-3)(x^3-4)$ 23. $(a^3-12)(a^3+5)$
24. $(a^3b^3-3)(a^3b^3+2)$ 25. $(a^4+1)(a^4-2)$
26. $(a+b+2)(a+b-6)$ 27. $(1-5a+5b)(1+3a-3b)$
28. $2(3y-2x)(3x-y)$ 29. $(x+6y+6z)(x-11y-11z)$
30. $-4a(2a+9b)$ 31. $(x-1)(x+3)(x^2+2x+15)$
32. $(x^2-3x+1)(x^2-3x-2)$ 33. $(x+a+2)(x-a-1)$
34. $(x-a+b)(x-a-b)$
35. $(x+a^2+b^2+2ab)(x+a^2+b^2-2ab)$
36. $(x-a-3b)(x+a+2b)$ 37. $(x-a)(x-\frac{1}{a})$
38. $(a+b-3)(a+b-2)$
39. $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$
40. $(x+2)(x+7)(x^2+9x+4)$ 41. $(x^2-3x-6)(x^2-3x-16)$
42. $(x+3)(x+4)(x^2-7x-2)$ 43. $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$.

প্রশ্নমালা 7

1. $(a+2)(4a+3)$ 2. $2(a+1)(2a-3)$ 3. $2(a-3)(2a+1)$
4. $(x-1)(5x+4)$ 5. $(4x-5)(x+1)$ 6. $(4p-7)(2p+1)$
7. $(p-1)(7p-8)$ 8. $(p+1)(7p-8)$ 9. $(1-a)(3-10a)$
10. $(1-2a)(3+5a)$ 11. $(3l-4m)(14l+5m)$
12. $(2x-y)(9x+20y)$ 13. $(2x-1)(2x-3)(x^2-2x+2)$
14. $(x^2-3x+4)(5x^2-15x-1)$
15. $(x-1)(2x+1)(10x^2-5x+4)$ 16. $4(3a-2b)(4b-a)$
17. $2b^2(15b^2-a^2)$ 18. $(x+a)(ax+1)$
19. $2(5a-2b)(5b-a)$ 20. $(x-y)\{(a-b)^2x+(a+b)^2y\}$.

প্রশ্নমালা 8

1. $(x+1)(x^2+1)$ 2. $(x-1)(x^2+1)$
3. $(x-1)(x^2+6x+4)$ 4. $(x+1)(x^2+6x+1)$
5. $(x+1)(x^2+3x+8)$ 6. $(2x+3)(x^2-x-3)$
7. $(x-1)(x^2+x-4)$ 8. $(a+1)(3a^2-3a+5)$
9. $(x+1)(x+2)(x^2-2x+2)$

10. $(x-2)(2x+1)(x^2+1)$ 11. $(a+1)(5a^2+6a-2)$
12. $(a-1)(a^2+a-5)$ 13. $(3+x)(2+x)(2-x)$
14. $(a+5)(4a-1)(a^2-2a-1)$.

প্রশ্নমালা 9

1. $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)$
2. $(2x-y+1)(4x^2+y^2+1+2xy-2x+y)$
3. $(x+2y-1)(x^2+4y^2+1-2xy+x+2y)$
4. $(2a-3b-1)(4a^2+9b^2+1+6ab+2a-3b)$
5. $(a^2-a+2)(a^4+a^3-a^2+2a+4)$
6. $(2a^2+a-1)(4a^4-2a^3+3a^2+a+1)$
7. $2(c-b)(3a^2+b^2+c^2-3ab-3ac+bc)$
8. $(1+2x-3y)(1+4x^2+9y^2-2x+3y+6xy)$
9. $3(x-y)(y-z)(z-x)$ 10. $3(x+y)(x-2y)(2x-y)$
11. 603 12. 0 13. 2034 14. 0.

প্রশ্নমালা 10

1. $(a-b)(b-c)(c-a)$
2. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
3. $-(a-b)(b-c)(c-a)$ 4. $-p(a-b)(b-c)(c-a)$
5. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$
6. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ 7. $(a+b)(b+c)(c+a)$
8. $(x+y)(y+z)(z+x)$ 9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$
10. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$
11. $-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$
12. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$
13. $-2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
14. $-4(a-b)(b-c)(c-a)$ 15. $(ab+bc+ca)(a+b+c+1)$
16. $-(x-y)(y-z)(z-x)$ 17. $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)$
18. $-(a-b)(b-c)(c-a)$
19. $(a+b+c)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)$
20. $(x+y+z+xyz)(xy+yz+zx+1)$ 21. $(x-b)(x-c)(b-c)$

প্রশ্নমালা 11

1. $3a^2b^3c^2$ 2. $a^2(b+c)$ 3. $(a+b)^2(c+d)^2$ 4. $a-b$
5. $(a-b)(b-c)$ 6. a^2-b^2 7. $x-y$ 8. $3(x+y)$
9. $x-y$ 10. $x-1$ 11. $x-y$ 12. $x+1$
13. $x(x+2)$ 14. $a+b-c$.

প্রশ্নমালা 12

1. $24a^2bc^2$ 2. $60a^2c^2(a-c)^2$
3. $(a+b)^2(a-b)^2(a^2-ab+b^2)$
4. $(x+y)(x^2+y^2)(x-y)^2(x^3-y^3)$
5. $(x+y)(y+z)(z+x)$ 6. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
7. $(a-x)(b^2-y^2)$ 8. $(x^6-y^6)(x^4-x^2y^2+y^4)$
9. $(a+2)(a+1)(a^3-1)$ 10. $(a^2-b^2)(3a-2b)(a^2+ab+b^2)$
11. $(x+a)(x^2-b^2)$ 12. $(a+b+c)(a-b-c)(b-a-c)$
13. x^6-y^6 14. $(a-1)(2a-3)(2a+1)(3a+2)$
15. $120xy(x^2-y^2)$ 16. $x^2(x-1)(x^2-4)(x+3)$
17. $(x-3)(x^2+1)(x^2+5)$ 18. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$.

প্রশ্নমালা 13

1. $2x+3$ 2. $x-3$ 3. $3x+1$ 4. $2x^2+7x+3$
5. $x+5$ 6. $x-2$ 7. $x+1$ 8. x^3+3x+5
9. x^2+4x+3 10. $a-2b$ 11. x^2-3x-4 12. $x+2$
13. x^2-3x+4 14. x^3-2x-1 15. $x+3$ 16. $x+5$
17. $x-1$ 18. $x(x^2-2x-1)$ 19. a^2+3a+1 20. x^2+x-2
21. $x-2$ 22. x^2+2x+3 23. $3x-7$ 24. $x-1$
25. $a-1$ 26. x^2-x+1 27. $2x(x-2)$.

প্রশ্নমালা 14

1. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ 2. $(x+1)(x-1)(2x+1)$
3. $(x-a)(x+c)(x-c)$ 4. $(x-1)(x-2)(x-3)$
5. $(a+2)(a+3)(a+4)(a^2+a+1)$
6. $(x+1)(x-1)(x-5)(x-7)$ 7. $x^2(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$
8. $(a+1)(a-1)^2(a-2)(a^2+1)$
9. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$
10. $(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(7x^2-5x-6)$
11. $36(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$ 12. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$
13. $x^2(x+2)(x-2)(x+4)$ 14 $(x-2)(x^2+2)(x^2+x+1)$
15 x^2+4x+3.

প্রশ্নমালা 15

1. 1 2. $\frac{p^3}{18q^2m^2}$ 3. $\frac{3(a-4)}{a+4}$ 4. $\frac{3x-1}{3}$
5. $\frac{3a+1}{3a-1}$ 6. $\frac{a+2}{a}$ 7. $\frac{a^2-b^2}{a}$ 8. $\frac{1-y}{x}$
9. $\frac{x^2+y^2}{x}$ 10. $\frac{x-y}{x+2y}$ 11. $\frac{1}{x^2+y^2}$ 12. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$
13. $\frac{3}{x^2+y^2}$ 14. 4 15. a 16. $\frac{a+1}{a-1}$
17. $\frac{x+1}{x-1}$ 18. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 19. $\frac{x}{b}$ 20. x^2
21. 1 22. $\frac{a(a-b+c)}{c(a+b+c)}$ 23. $\frac{a-b}{a+b}$ 24. 1
25. a^3 26. $\frac{2a^2}{a^2+b^2}$.

প্রশ্নমালা 16

1. $\frac{2x+1}{3x+2}$ 2. $\frac{a^3}{a^4-a^2-1}$ 3. $\frac{x-1}{x}$ 4. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$
5. x 6. x 7. 0 8. 1 9. 0
10. 0 11. $a+b+c$ 12. -1 13. $ab+bc+ca$
14. 0 15. $\frac{1}{abc}$ 16. 0 17. 0 18. 0
19. 0 20. 1 21. 0 22. 1 23. 3
24. $a+b+c$ 25. $2(x^2+y^2+z^2)$ 26. $\frac{1}{abc}$
27. 1 28. x.

প্রশ্নমালা 17

x-এর মান দেওয়া হইল :—

1. -1 2. 0 3. 1 4. $-\frac{5}{8}$ 5. -7
6. $a+b+c$ 7. $-\frac{a^2+b^2}{2a}$ 8. $\frac{b^2}{a-c}$ 9. $\frac{1}{ab}$
10. 17 11. -7 12. 5 13. $-\frac{3}{4}$
14. -9 15. a 16. 8 17. $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$
18. 6 19. -14 20. $2\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 18

1. 1 2. ·5 3. 11 4. 7 5. 4 6. 19
7. 5·16 8. ·6 9. $3\dot{3}$ 10. 5.

প্রশ্নমালা 19

1. -14 2. $2\frac{1}{2}$ 3. 0 4. $\dfrac{b^2-ac}{a^2+c^2-ab-bc}$

5. $-\dfrac{12}{29}$ 6. $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$ 7. $a-2b$ 8. $\frac{5}{8}$ 9. 2

10. $\frac{1}{4}$ 11. 6 12. 7 13. $2\frac{3}{5}$ 14. $-1\frac{2}{5}$

15. $-8\frac{2}{3}$ 16. $\frac{31}{47}$ 17. $3a$ 18. -6 19. 5

20. 6 21. $4\frac{1}{2}$ 22. $\frac{7}{12}$ 23. $-\frac{1}{2}(a+b)$

24. $\dfrac{a+b}{2}$ 25. $a+b$ 26. $ab+bc+ca$ 27. $a+b+c+abc$

28. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 29. $-(a+b+c)$ 30. $(a+b+c)^2$

31. $a^3+b^3+c^3$ 32. $-(a+b+c)$ 33. $-(a^2+b^2+c^2)$

34. $a^3+b^3+c^3$ 35. 13 36. $-5\frac{1}{2}$ 37. $3\frac{1}{3}$

38. $-\frac{1}{2}$ 39. $-2\frac{1}{2}$ 40. $5\frac{1}{2}$ 41. 9

42. 2 43. $-\frac{1}{2}(a+b)$ 44. -7 45. $\dfrac{b}{a}(a-b+c)$.

প্রশ্নমালা 20

1. 672 বর্গ সে. মি. 2. 44, 45 3. $\frac{3125}{256}$ 4. $\frac{15}{80}$ 5. $\frac{17}{21}$

6. 72 7. টাকা 189টি, 50 পয়সা মুদ্রা 352টি 8. 2 টা. 6 প.

9. 960 টা. 10. প্রথম দরে 150টি, দ্বিতীয় দরে 120টি 11. $\frac{4}{7}$ 12. $12\frac{1}{2}$

13. 1 14. 42, 47, 11, 220 15. 37 টা, 52 টা, 4 টা, 528 টা.

16. 73 17. 25 18. 20 জন 19. 22 দিন 20. 60 বৎসর

21. 24 ব. 22. 25 ব. 23. 1830 টা.

24. পিতার 40 বৎসর, বড় ছেলের 10 বৎসর, ছোট ছেলের 8 বৎসর

25. 240টি 26. 16 মিটার।

প্রশ্নমালা 21

1. 2টা বাজিয়া $10\frac{10}{11}$ মিনিটে

2. 5টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে ও 5টা $43\frac{7}{11}$ মিনিটে

3. (1) 2টা $43\frac{7}{11}$ মি. (2) 2টা $27\frac{3}{11}$ মি. (3) 2টা 24 মি.

4. 5টা $16\frac{4}{11}$ মি. ও 5টা $38\frac{2}{11}$ মি.

5. 1টা $21\frac{9}{11}$ মি. ও 1টা $54\frac{6}{11}$ মি.

6. 5টা $32\frac{4}{13}$ মি. 7. 100 জন 8. 7 জন 9. 1200 10. 530

11. 2250 12. 600 জন 13. ঘণ্টায় 2 কি. মি. ও 4 কি. মি.

14. 35 কি. মি., 45 কি. মি. 15. 1215, 15.

প্রশ্নমালা 22

প্রথমটি x-এর এবং দ্বিতীয়টি y-এর মান দেওয়া হইল।

1. 4, 1 2. 2, 1 3. 2, 1 4. 14, -12
5. -3, 2 6. 4, -3 7. 4, -1 8. 1, 1
9. 12, 4 10. 22, -16 11. -2, 3 12. 16, 4.

প্রশ্নমালা 23

প্রথমটি x-এর এবং দ্বিতীয়টি y-এর মান :

1. 2, 3 2. -3, 5 3. -2, -3 4. $1\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{2}$
5. $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$ 6. $\frac{8}{3}$, $-\frac{8}{9}$ 7. 16, -4 8. $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$
9. 35, 7 10. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 11. 3, 1 12. 7, 9.

প্রশ্নমালা 24

প্রথমটি x-এর এবং দ্বিতীয়টি y-এর মান :

1. 6, 1 2. 2, 4 3. 4, -1 4. 2, 1 5. 3, 2
6. 2, $-\frac{1}{4}$ 7. $\frac{1}{4}$, -4 8. 6, 2
9. 5, 9 10. $-\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$ 11. $-\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$ 12. $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$.

প্রশ্নমালা 25

পরপর x ও y-এর মান দেওয়া হইল :

1. 5, 2 2. 1, 2 3. 5, 4 4. a, b
5. $a+b, b-a$ 6. $\frac{c^2-bc^2}{a^2-ab}, \frac{ac^2-c^2}{ab-b^2}$ 7. $\frac{b^2}{2a}, \frac{2a^2+b^2}{2a}$
8. a, b 9. a, b 10. a^2, b^2 11. $\frac{1}{a}, b$ 12. a, b
13. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ 14. $2, \frac{2}{3}$ 15. $a+b, a-b$ 16. $a+b, a-b$
17. 2, 1 18. $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}$
19. $\frac{ac-b-bc}{a^2-b^2}, \frac{a+ac-bc}{a^2-b^2}$ 20. $a+b, -\frac{2ab}{a+b}$

প্রশ্নমালা 26

1. 28, 24 2. 45, 36 3. 52, 28 4. 36, 24
5. 10, 6 6. $\frac{4}{5}$ 7. $\frac{7}{9}$ 8. $\frac{15}{26}$
9. $\frac{9}{13}$ 10. 36 11. 27 12. 54
13. 28 অথবা 82 14. $x=15, y=105$
15. $x=45, y=46$ 16. A-র 36 ব., B-র 43 ব.
17. পিতার 43 ব., পুত্রদ্বয়ের 8 ব. ও 6 ব. 18. 68 ব., 32 ব.

19. 38 ব., 10 ব. 20. 1,200 টা.
21. 1,500 টা. 22. 31 টা. 23. 10 দিন
24. ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ কি. মি. ও $3\frac{3}{4}$ কি. মি.
25. ঘণ্টায় স্রোতের বেগ 3 কি. মি. এবং নৌকার বেগ 8 কি. মি.
26. ঘণ্টায় 3 কি. মি. 27. 3, 3 28. 17 মি., 9 মি.
29. ঘণ্টায় A-র 6 মা. ও B-র 4 মা. 30. $1\frac{1}{3}$ টাকা
31. 17 মি., 13 মিটার 32. ঘণ্টায় 2 কি. মি.
34. A-র 36 বৎসর, B-র 27 বৎসর
35. 3 টা $21\frac{57}{143}$ মিনিটে বাহির হন, 4 টা $16\frac{112}{143}$ মিনিটে ফিরিয়া আসেন
36. 5 : 9.

প্রশ্নমালা 27

3. 48 দৈর্ঘ্য একক 4. $-1\cdot5$ একক
5. x-অক্ষ পক্ষে (i) $(2, -3)$; (ii) $(3, -4)$; (iii) $(2, 3)$; (iv) $(-2, 5)$. মূলবিন্দু পক্ষে (i) $(-2, -3)$; (ii) $(-3, -4)$; (iii) $(-2, 3)$; (iv) $(2, -5)$.

প্রশ্নমালা 28

13. $x=0, y=7$ 14. $5, -3\cdot5$ 15. $(1, 1)$ 16. $(3, 4)$
17. $(2, 4)$ 18. $(0, 5)$ 19. $(7, 1)$
20. $x=2y$ 22. 90° 23. 13 একক
24. $\cdot225$ বর্গ ইঞ্চি 25. 12 বর্গ একক 26. $\cdot1$ বর্গ ইঞ্চি।

প্রশ্নমালা 29

2. 1 টাকা 5 পয়সা, 10টি 4. 60 পয়সা, 22টি
5. অপরাহ্ণ 5টায়, 35 কি. মি. দূরে
6. (i) 80 টা., মাসিক 240 টাকা 7. 24,500 জন।
9. (i) 10 টা. (ii) 45 টা.
(iii) (*a*) 8 ব. (*b*) 9 ব. (*c*) 12 ব. (*d*) $11\frac{1}{2}$ ব.
11. 148 টা. 12. 81 মিটার 13. $5\cdot6$ সেকেণ্ড
14. 9 সেকেণ্ড।

বিবিধ প্রশ্নমালা 30

1. $x-3$ 2. $(x-2)(x-3)(2x-3)(3x+4)$
3. $(x+4y-4a)(x-y-2a)$ 4. $x=6$ 5. $x=-\frac{3}{2}$
6. $x=11, y=8$ 9. 2 12. $(x^2+20x+95)^2-(4)^2$
14. পিতার বয়স 40 বৎসর, পুত্রের বয়স 8 বৎসর 15. 23 16. 1, 0
17. প্রত্যেক প্রকার 72টি 19. 8, 14, 55 20. 40
22. পদ্ম 5টি, মৌমাছি 12টি।

পরিশিষ্ট

নির্ণায়ক বা ছক (Determinant)

আনুমানিক খ্রীষ্টীয় উনবিংশ শতাব্দীতে Cauchy প্রথমে কতিপয় গাণিতিক রাশিমালার নাম Determinant ব্যবহার করেন। এই শব্দটির পারিভাষিক নাম নির্ণায়ক বা ছক। ইহার সাহায্যে একঘাত সহসমীকরণ সমাধান প্রণালী পূর্বে প্রদর্শিত বজ্রগুণন প্রণালীতে ঐ সমীকরণ সমাধান প্রণালীর অনুরূপ।

$a_1x+b_1y=0\cdots(1)$ এবং $a_2x+b_2y=0\cdots(2)$ সমীকরণ দুইটির প্রথমটি হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1}$ এবং দ্বিতীয়টি হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{b_2}{a_2}$,

$$\therefore \quad -\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}, \quad \text{বা,} \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}.$$

$\therefore \quad a_1b_2-a_2b_1=0.$ ইহাকে নিম্নের বর্গাকার ছকে সাজান যায়—

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ইহা একটি determinant (ছক), ইহাতে দুইটি অনুভূমিক সারি ও দুইটি উলম্ব স্তম্ভ আছে। ইহাকে দ্বিতীয় ক্রমের ছক বা নির্ণায়ক (determinant) বলে। ইহার মান :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

আবার দেখ, a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 ও a_3, b_3, c_3 এই নয়টি রাশিকে

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এইরূপে সাজান যায়। ইহাতে তিনটি সারি (row) ও তিনটি স্তম্ভ (column) আছে। ইহাকে নয়টি অক্ষরের (রাশির) বর্গাকার ছক বলে। ইহা তৃতীয় ক্রমের determinant. ইহার মান :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2).$$

এখানে লক্ষ্য কর যে, প্রথম রাশির প্রত্যেক পদকে গুণ করিবার সময় এই সারির ও এই স্তম্ভের অন্য পদগুলিকে ছাড়িয়া অন্য পদগুলির দুই দুইটির বজ্রগুণনের গুণফল দ্বারা গুণ করা হইয়াছে।

Determinant প্রয়োগে একঘাত সহসমীকরণ সমাধান :

তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ যে, $a_1x+b_1y=c_1$ ও $a_2x+b_2y=c_2$, এই দুই সমীকরণের সমাধান হয় $x=\dfrac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, যখন $a_1b_2-a_2b_1\neq0$.

এই সমাধানটি determinant আকারে সাজাইয়া পাই

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}} \text{ এবং } y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}} \text{ যেখানে } \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0.$$ ইহাকে Cramer's Rule বলা হয়।

উদাহরণ। সমাধান কর : $\left.\begin{aligned}3x+4y&=14\\ 4x-3y&=2\end{aligned}\right\}$

এখন x ও yএর সহগগুলিকে লইয়া determinant হয়—

$\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}=3(-3)-4.4=-9-16=-25\neq0.$ [এখানে যদি এই মান শূন্য হইত, তবে কোন সমাধান পাওয়া যাইত না অথবা বহু সমাধান হইত।]

এক্ষণে Cramer's নিয়মে পাই

$$x=\frac{\begin{vmatrix}14 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-42-8}{-25}=\frac{-50}{-25}=2 \text{ এবং}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 14\\ 4 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}}=\frac{6-56}{-25}=\frac{-50}{-25}=2$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $x=2$, $y=2$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই সমাধান প্রণালী তিন বা ততোধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য তোমরা পূর্বে দুইটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত যে সকল সহসমীকরণ সমাধান করিয়াছ সেই প্রশ্নগুলিকে এই প্রণালীতেও সমাধান করিয়া দেখ।

এই নির্ণায়ক সম্বন্ধে ধারণা সৃষ্টি করার জন্য এখানে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হইল। এই সম্বন্ধে আরও অনেক জ্ঞাতব্য তথ্য পরে শিখিবে।]

সেট তত্ত্ব (Set Theory)

নূতন শিক্ষাপদ্ধতিতে Modern Mathematics-এর প্রচলন হইতেছে। ইহার ভিত্তি হইল সেট তত্ত্ব। সেইজন্য গণিতজ্ঞগণ মনে করেন ষষ্ঠ, সপ্তম প্রভৃতি শ্রেণী হইতে আরম্ভ করিয়া ছাত্র-ছাত্রীদের এ বিষয়ে প্রাথমিক ধারণা থাকা প্রয়োজন। সেইজন্য এইস্থানে **আগ্রহী ও মেধাবী ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য** এ-সম্বন্ধে প্রাথমিক তত্ত্বগুলির আলোচনা করা হইতেছে।

1. **সেট :** যে কোন সংখ্যক বস্তুর সমাহারকে অর্থাৎ কোন সংখ্যক বস্তুকে সমষ্টিগতভাবে একটি সেট (set) বলে। প্রত্যেকটি বস্তুকে ঐ সেটের একটি পদ (element বা member) বলে। কোন বস্তু একটি সেটের একটি পদ কিনা, তাহা ঐ বস্তুর বিশেষ কোন ধর্মের (property) উপর নির্ভর করে। পদগুলির বিশেষ কোন ধর্মকেই একটি সেটের নির্ধারক বলা হয়।

উদাহরণ 1. একটি বিদ্যালয়ের সকল ছাত্র সমষ্টিগতভাবে একটি সেট। মনে কর সেটটি S. ঐ বিদ্যালয়ের প্রত্যেক ছাত্রই সেটটির একটি পদ এবং যে বালক ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্র নয়, সে ঐ S-র কোন পদ নয়। এখানে ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্র হওয়াই S-এর প্রত্যেকটি পদের বিশেষ ধর্ম।

উদাহরণ 2. সকল সামান্য ভগ্নাংশ একটি সেট। কারণ এক্ষেত্রে বলা সম্ভব কোন্ বস্তু ঐ সেটের পদ এবং কোন্ বস্তু ঐ সেটের পদ নয়।

উদাহরণ 3. পৃথিবীর সকল দীর্ঘ নদী সমষ্টিগতভাবে একটি সেট নহে। কারণ, কোন্ নদীগুলি দীর্ঘ এবং কোন্ নদীগুলি দীর্ঘ নয় তাহা ঠিক করা সম্ভব নয়। সুতরাং কোন্ নদী ঐ সেটের একটি পদ এবং কোন্ নদী ঐ সেটের একটি পদ নহে, তাহা সঠিকভাবে বলা সম্ভব নয়।

2. **প্রতীক চিহ্ন :** এইবার একটি বিশেষ চিহ্নের সহিত তোমাদের পরিচয় করাইব। '$\in$' এই চিহ্নটি দ্বারা কোন বস্তু বা রাশি কোন সেটের পদ বুঝান হয়। যদি a কোন সেট A-এর কোন পদ হয়, তবে লেখা হয়, $a \in A$. $\frac{5}{7}$ সংখ্যাটি একটি সামান্য ভগ্নাংশ। ∴ সকল সামান্য ভগ্নাংশের সেট যদি R হয়, তবে $\frac{5}{7} \in R$. ইহাকে $\frac{5}{7}$, Rএর একটি পদ এইরূপ পড়িবে।

যদি AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হয়, তোমরা লেখ $AB = CD$ এবং যদি উহারা অসমান হয়, তোমরা লেখ $AB \neq CD$, অর্থাৎ **'সমান'** চিহ্নটি কাটিয়া দিয়া **অসমান** বুঝান হয়।

অনুরূপে কোন বস্তুর কোন বিশেষ সেটের পদ হওয়ার চিহ্ন '$\in$'কে কাটিয়া

দিয়া বুঝান হয় যে ঐ বস্তু কোন বিশেষ সেটের পদ নয়। $\therefore$ b যদি A সেটের কোন পদ না হয়, তবে $b \notin A$ লেখা হয়। মনে কর, 12 সংখ্যাটির সকল মৌলিক উৎপাদকের সেট F. $\therefore$ $5 \notin F$.

1, 2, 3, 4 এই চারিটি সংখ্যার সমাহার একটি সেট S.

$\therefore$ $1 \in S, 2 \in S, 3 \in S, 4 \in S$; কিন্তু $5 \notin S, 7 \notin S$. কারণ 5 বা 7 S-এর পদ নয়।

সাধারণতঃ ইংরাজী বড় হরফ দ্বারা সেট চিহ্নিত করা হয় এবং পদগুলি চিহ্নিত হয় ইংরাজী ছোট হরফ দ্বারা।

কোন সেটকে সাধারণতঃ দুই প্রকারে লেখা হয়। সম্ভব হইলে সেটের পদগুলিকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লিখিয়া সেটটি বুঝান হয়। যেমন, $\{1, 2, 3, 4\}$ একটি সেট, যাহার পদগুলি 1, 2, 3 ও 4.

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ সেটটি 12 সংখ্যাটির সকল উৎপাদকের সেট। দ্বিতীয় পদ্ধতিতে, কোন বস্তু তাহার যে বিশেষ ধর্মের জন্য কোন সেটের একটি পদ, তাহার দ্বারা ঐ সেটটিকে নির্দেশ করা হয়। $\{a : P\}$ হইতেছে সেই সেট যাহার প্রত্যেকটি পদের একটি বিশেষ ধর্ম P.

$\{a : a$ একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা$\}$, ইহা সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যার সেট। $\{a : a$ একজন ভারতীয়$\}$, এই সেটটির প্রত্যেক পদ একজন ভারতীয় এবং অভারতীয় কোন ব্যক্তি এই সেটের কোন পদ নহে।

৩. **সাবসেট :** যদি একটি সেট S-এর প্রত্যেকটি পদ অপর একটি সেট A-এর একটি পদ হয়, অর্থাৎ যদি $a \in S$ হইলে $a \in A$ হয়, তবে আমরা বলি S সেটটি A সেটটির একটি সাব-সেট (sub-set) এবং $S \subset A$ (S সেটটি A-সেটের অন্তর্গত)। সকল পশ্চিমবঙ্গবাসীর সেটটি সকল ভারতীয়ের সেটটির একটি সাবসেট। কারণ প্রত্যেক পশ্চিমবঙ্গবাসী একজন ভারতীয়।

দুইটি সেট A ও B যদি এইরূপ হয় যে, A-র প্রত্যেকটি পদ B-এর একটি পদ এবং B-এর প্রত্যেকটি পদ A-এর একটি পদ হয় অর্থাৎ যদি $a \in A$ হইলে $a \in B$ হয় এবং যদি $b \in B$ হইলে $b \in A$ হয়, তবে A ও B সেট দুইটিকে অভিন্ন বা সমান বলা হয় এবং লেখা হয় $A = B$. যথা, $\{1, 4, 6, 8\} = \{8, 6, 41\}$

সেট S-কে উহারই সাবসেট বলা হয়।

4. একাধিক সেট সম্পর্কিত আলোচনায় প্রত্যেক সেটকে একটি বিশেষ সেট U-এর সাবসেট রূপে কল্পনা করা হয়। Uকে বলা হয় একটি **ইউনিভার্সাল সেট** (universal set)।

5. **শূন্য সেট :** মনে কর $\{x : x=1, x=2\}$, U-এর একটি সাবসেট। তোমরা জান এমন কোন বস্তু নাই যাহা একই সঙ্গে 1 ও 2এর সহিত সমান। সুতরাং সেটটির কোন পদ নাই। যে সেটে কোন পদ থাকে না, তাহাকে শূন্য-সেট (Empty Set) বলে। সাধারণতঃ ϕ (Phi) এই গ্রীক অক্ষর দ্বারা শূন্য সেটকে চিহ্নিত করা হয়। $\phi=\{x : x \neq x\}$ শূন্য সেট। শূন্য সেট সম্বন্ধে মনে রাখিবে যে (i) একাধিক শূন্য সেট থাকিতে পারে না এবং (ii) ϕ প্রত্যেক সেটের সাবসেট এবং (iii) প্রত্যেক অশূন্য সেট Sএর অন্ততঃ ϕ ও S দুইটি সাবসেট হয়।

6. **দুইটি সেটের যোগ ও ছেদ (Union and Intersection of two Sets) :**

মনে কর A ও B দুইটি সেট। যে সেটের প্রতিটি পদ A বা B বা উভয়ের একটি পদ তাহাকে A ও B সেট দুইটির যোগ (union) বলা হয় এবং সেটটিকে $A \cup B$-রূপে লেখা হয়।

আবার যে সেটের প্রতিটি পদ, A ও B উভয়েরই পদ, তাহাকে সেট দুইটির ছেদ বলে এবং লেখা হয় $A \cap B$.

যদি $A \cap B = \phi$ হয়, তবে A ও B-এর কোন সাধারণ পদ নাই এবং A ও Bকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন (dis-joint) বলা হয়।

উদাহরণ। নিম্নের সেট দুইটির যোগ ও ছেদ সেট দুইটি নির্ণয় কর।

(i) A=1 হইতে বৃহত্তর বা সমান এবং 30 হইতে ক্ষুদ্রতর বা সমান সকল যুগ্ম সংখ্যার সেট।

(ii) B=1 হইতে বৃহত্তর বা সমান এবং 30 হইতে ক্ষুদ্রতর বা সমান 3-এর সকল গুণিতক সংখ্যার সেট।

(i) এখানে স্পষ্টতঃ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$.

(ii) $B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$.

$\therefore$ $A \cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30\}$.

এবং $A \cap B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$.

7. **দুইটি সেটের অন্তর :** মনে কর A ও B দুইটি সেট। A সেটের যে সকল পদ B সেটের পদ নয়, তাহাদের সমাহারকে A−B-রূপে লেখা হয় এবং A−B সেটটি A ও B সেট দুইটির অন্তর। B−A সেটটি সেই সকল পদের

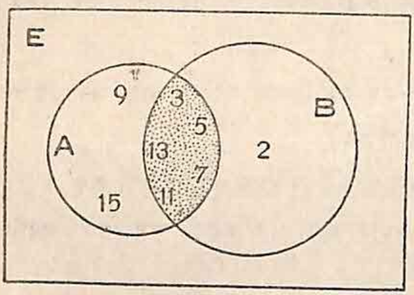
সমাহার যাহারা B-এর পদ কিন্তু A-এর পদ নয়। যদি U ইউনিভার্সাল সেট হয়, তবে U – A-কে A′ লেখা হইবে।

৪. ভেন্ চিত্র (Venn Diagram): সেটের বিভিন্ন ধর্ম বা সেট সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা অনেক সময়ই চিত্রের সাহায্যে সহজে প্রমাণ করা বা বুঝা যায়। বিখ্যাত ইংরেজ তর্কশাস্ত্রবিদ্ জন্ ভেন্ যুক্তিশাস্ত্রের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের জন্য সর্বপ্রথম চিত্রের সাহায্য গ্রহণ করিয়াছিলেন। এইজন্য যে চিত্রের সাহায্যে এক বা একাধিক সেট ও সাবসেটের প্রকাশ করা হয়, তাহাকে ভেন্ চিত্র (Venn Diagram) বলে।

ভেন্ চিত্রে জ্যামিতিক চিত্রের ভিতর ও বাহিরের ক্ষেত্র দ্বারা সেট ও সাবসেট নির্দেশ করা হয়। অনেক সময় ইউনিভার্সাল সেটকে একটি আয়তক্ষেত্রের দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ। মনে কর ইউনিভার্সাল সেট

E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}



A = {x : x একটি অযুগ্ম সংখ্যা}
B = {x : x একটি মৌলিক সংখ্যা}

E, A ও Bকে আয়তক্ষেত্র ও দুইটি বৃত্তের সাহায্যে প্রকাশ করা হইল। যেহেতু কম সংখ্যক পদ এখানে সংশ্লিষ্ট, তাই সেটের পদগুলিকেও দেখান গিয়াছে। সব সময় কিন্তু, এইরূপ সম্ভব নহে। দেখ, রেখাঙ্কিত অংশ উভয় সেটের ছেদ।

9. **সেট ও সাবসেটের বিভিন্ন ধর্ম :**

নীচে সেট ও সাবসেটের বিভিন্ন ধর্মের একটি তালিকা দেওয়া হইল। এই ধর্মগুলি যুক্তির সাহায্যে প্রমাণ করা যায়। তোমরা ভেন্ চিত্রের সাহায্যে ঐ ধর্মগুলির সত্যতা পরীক্ষা করিয়া দেখ।

ধর্ম 1. (i) $A \cup A = A$, (ii) $A \cup U = U$, (iii) $A \subset B$ হইলে $A \cup B = B$.

2. (i) $A \cap A = A$, (ii) $A \cap U = A$, (iii), $A \subset B$ হইলে $A \cap B = A$.

3. $A - B = A \cap B'$ [যদি U ইউনিভার্সাল সেট হয় তবে $U - B$কে B' লেখা হয়।]

4. (i) $A=(A\cap B)\cup(A-B)$, (ii) $B\cap(A-B)=\phi$.

5. (i) $A\cup B=B\cup A$, (ii) $A\cap B=B\cap A$.

6. (i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

(ii) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

7. (i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

(ii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

8. (i) $U'=\phi$; (ii) $\phi'=U$,

(iii) $A\cup A'=U$; (iv) $(A\cap A')=\phi$; (v) $(A')'=A$.

9. (i) $A\cap(A\cup B)=A$; (ii) $A\cup(A\cap B)=A$.

10. (i) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

(ii) $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

10. শতকরা সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্ন সমাধানে সেটের প্রয়োগ :

উদাহরণ 1. একটি পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 62% গণিতে, 52% ইংরাজীতে পাশ করিয়াছে এবং 22% উভয় বিষয়েই ফেল করিয়াছে। যদি 108 জন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়েই পাশ করে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 100 এবং $U=$ মোট পরীক্ষার্থী সেট।

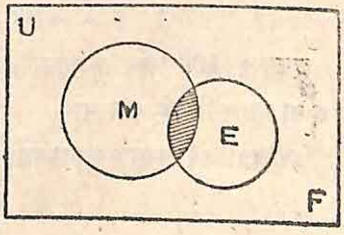
$M=$ যে সকল পরীক্ষার্থী গণিতে পাশ করিয়াছে তাহাদের সেট।

$E=$ যে সকল পরীক্ষার্থী ইংরাজীতে পাশ করিয়াছে তাহাদের সেট।

$F=$ যে সকল পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করিয়াছে তাহাদের সেট।

এখানে U, M, E ও Fএর পদ সংখ্যা যথাক্রমে 100, 62, 52 ও 22.

যে সকল ছাত্র গণিত এবং ইংরাজী উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছে তাহাদের সেট $M\cap E$ (রেখাঙ্কিত অংশ)।



এক্ষণে পার্শ্বের ভেন্ চিত্র হইতে পাই,

$M-M\cap E=M\cup E-E$

$=F'-E$ [এখানে, $F'=U-F$]

$\therefore\ 62-M\cap E$

$=(100-22)-52=26.$

এক্ষণে দেখ, 62 হইতে $M\cap E$এর পদসংখ্যার বিয়োগফল 26 হয়। সহজেই $M\cap E$এর পদসংখ্যা $=62-26=36$.

সুতরাং 36 জন যখন উভয় বিষয়ে পাশ করে তখন পরীক্ষার্থীর মোট সংখ্যা 100

$\therefore$ 1 জন ... ... মোট সংখ্যা $\frac{100}{36}$

$\therefore$ 108 জন ... ... মোট সংখ্যা $\frac{100}{36} \times 108$

$= 300$ জন।

অতএব নির্ণেয় মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 300 জন।

উদাহরণ 2. N.C.C.র বার্ষিক ক্যাম্পে দেখা গেল 65% ক্যাডেট্ মাছ খায়, 55% ক্যাডেট্ মাংস খায় এবং 40% ক্যাডেট্ উভয়ই খায়। দেখাও যে 20% ক্যাডেট্ মাছ ও মাংস উভয়ই খায় না।

[আগের চিত্রটি আবার দেখ।]

মনে কর ক্যাডেট্ সংখ্যা 100.

এবং $U =$ সকল ক্যাডেটের সেট।

$E =$ যে সকল ক্যাডেট মাছ খায় তাহাদের সেট।

$M =$ যে সকল ক্যাডেট মাংস খায় তাহাদের সেট।

$\therefore$ $M \cup E =$ যে সকল ক্যাডেট মাছ ও মাংস উভয়ই খায় তাহাদের সেট।

এ খানে U, E, M ও $M \cup E$এর পদসংখ্যা যথাক্রমে 100, 65, 55, 40.

এক্ষণে আগের ভেন্ চিত্র হইতে পাই,

$M - M \cap E = M \cup E - E = F' - E$

$\therefore$ $55 - 40 = M \cup E - 65$, বা, $15 = M \cup E - 65$

$\therefore$ $M \cup E = 15 + 65 = 80.$

যে সকল ক্যাডেট্ মাছ ও মাংস উভয়ই খায় না, তাহাদের সেট F হইলে $F = U - M \cup E.$

$\therefore$ Fএর পদসংখ্যা = Uএর পদসংখ্যা − $M \cup E$এর পদসংখ্যা

$= 100 - 80 = 20,$

সুতরাং 100 জন ক্যাডেটের 20 জন অর্থাৎ শতকরা 20 জন ক্যাডেট্ মাছ বা মাংস কিছুই খায় না।

[তোমরা এই পুস্তকের শতকরা প্রশ্নমালার অঙ্কগুলি সেটের প্রয়োগে কর।]

পরিশিষ্ট ঃ

Model Objective Questions

বস্তুভিত্তিক আদর্শ প্রশ্নমালা

পাটীগণিত

প্র. 1. শূন্যস্থানগুলি পূর্ণ কর :—

(i) ভাজক = (ভাজ্য − ....) ÷ ভাগফল।

(ii) দুইটি সংখ্যার গুণফল = উহাদের গ. সা. গু. × ...

প্র. 2.. নিম্নের প্রত্যেকটিতে যোগের কোন্ নিয়ম প্রযুক্ত ?

(i) $30+21=21+30$, (ii) $(5+9)+6=5+(9+6)$,

(iii) $(x+y)+z=x+(y+z)$.

প্র. 3. গুণের কোন্ নিয়মে নিম্নের সম্বন্ধগুলি সিদ্ধ ?

(i) $(3\times5)\times4=3\times(5\times4)$, (ii) $4(a+b)=4a+4b$,

(iii) $3\times(6+5)=(3\times6)+(3\times5)$.

প্র. 4. $\frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{2}{9}, \frac{13}{24}$ এই ভগ্নাংশগুলিকে মানের অধঃক্রমে সাজাইতে হইবে। নিম্নে সাজানগুলিতে যেটি ঠিক (নির্ভুল) তাহার গায়ে বন্ধনীর মধ্যে √ (টিক) চিহ্ন দাও এবং যেটি ভুল তাহার গায়ে (×) চিহ্ন দাও :—

(i) $\frac{5}{6}>\frac{5}{8}>\frac{2}{9}>\frac{13}{24}$ (−), (ii) $\frac{5}{8}>\frac{5}{6}>\frac{2}{9}>\frac{13}{24}$ (−),

(iii) $\frac{5}{6}>\frac{5}{8}>\frac{13}{24}>\frac{2}{9}$ (−)।

সমাধান : প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির 6, 8, 9, 24 এই হরগুলির ল. সা. গু. = 72.

এক্ষণে, $\frac{5}{6}=\frac{5\times12}{6\times12}=\frac{60}{72}$, $\frac{5}{8}=\frac{45}{72}$, $\frac{2}{9}=\frac{16}{72}$, $\frac{13}{24}=\frac{39}{72}$.

∴ উহাদিগকে মানের অধঃক্রমে সাজাইলে ঐ ক্রম হইবে $\frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{13}{24}, \frac{2}{9}$,

অতএব, (i) $\frac{5}{6}>\frac{5}{8}>\frac{2}{9}>\frac{13}{24}$ (×), (ii) $\frac{5}{8}>\frac{5}{6}>\frac{2}{9}>\frac{13}{24}$ (×),

(iii) $\frac{5}{6}>\frac{5}{8}>\frac{13}{24}>\frac{2}{9}$ (√).

প্র. 5. নিম্ন সংখ্যাগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজাও :—

$1{\cdot}5, (0{\cdot}1), \frac{4}{5}, ({\cdot}25)^{{\cdot}5}, -3{\cdot}25, (\frac{3}{5})^{{\cdot}5}$

প্র. 6. নিম্নের শূন্যস্থানগুলি পূর্ণ কর :—

(i) $5\frac{1}{3}\div\cdots=2$, (ii) $\frac{3}{5}=\frac{\cdots}{7\frac{1}{5}}$, (iii) $\frac{2}{5}+\frac{5}{6}+\cdots=3$.

প্র. 7. (i) নিম্নের প্রদত্ত প্রত্যেক সেটের দুইটি সমতুল ভগ্নাংশ নির্ণয় কর :—

(a) $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{7}\}$, (b) $\{\frac{3}{7}, \frac{6}{15}, \frac{9}{21}, \frac{5}{8}\}$

(ii) নিম্নের শূন্যস্থানগুলিতে লুপ্ত সংখ্যাগুলি বসাও :—

(a) 232 সে. মি.= — মিলি মি.= — মিটার।

(b) 3·21 গ্রা.= — সে. গ্রা.= — ডেসি গ্রা.

(c) $2{\cdot}3\times10^2$ মি.= — $\times10^4$ সে. মি.= — $\times10^3$ ডেসি মি.।

(iii) নিম্নের বিবৃতিগুলিতে a-র শুদ্ধ পরিবর্ত কি হইবে ?

(a) $\frac{2}{5}=\frac{a}{40}$, (b) $\frac{2}{3}=\frac{12}{a}$, (c) $\frac{4}{7}=\frac{a.4}{a.7}=\frac{36}{63}$.

প্র. 8. প্রত্যেকটির শেষে প্রদত্ত বন্ধনীর মধ্যে যোগ্য সংখ্যা বা শব্দ লইয়া নিম্নের বিবৃতিতে শূন্যস্থানগুলি পূর্ণ কর :—

(i) তিনটি ক্রমিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল ··· দ্বারা সর্বদা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য [4, 5, 6]. [A. I. H. S. '71]

(ii) সমস্ত মৌলিক সংখ্যার সেট একটি ··· সেট [সসীম, অসীম]।

প্র. 9. দুইটি পর পর অখণ্ড সংখ্যার গুণফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইতে পারে কি ? কারণ দেখাইয়া উত্তর দাও।

প্র. 10. প্রত্যেকটি বন্ধনীর ভিতর হইতে শুদ্ধ উত্তরটি দ্বারা নিম্নের শূন্যস্থানগুলি পূরণ কর :—

(i) কোন বিজোড় সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে সর্বদা ··· ভাগশেষ থাকে। [1, 3, 5, 7]

(ii) প্রথম 50টি ক্রমিক মৌলিক সংখ্যার গুণফল 7এর সর্বোচ্চ ঘাত ··· দ্বারা বিভাজ্য। [1, 5, 10, 25]।

প্র. 11. প্রমাণ কর যে, যে কোন তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

সমাধান : যে কোন তিনটি পর পর স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে একটি সংখ্যা অবশ্যই 3এর গুণিতক (অর্থাৎ 3 দ্বারা বিভাজ্য) এবং অন্ততঃ একটি যুগ্ম সংখ্যা (অর্থাৎ 2 দ্বারা বিভাজ্য) থাকিবেই। অতএব, ঐরূপ তিনটি সংখ্যার গুণফল অবশ্যই 3×2 বা 6 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[দ্রষ্টব্য : x যদি কোন স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তবে $x(x+1)(x+2)$ এইটি 6 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। কারণ, x যদি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তবে x, $x+1$ ও $x+2$ তিনটি পর পর স্বাভাবিক সংখ্যা হইবে।]

প্র. 12. প্রমাণ কর যে 1 অপেক্ষা বৃহত্তর প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যাকে সসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যার গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

[A. I. H. S. '71]

সমাধান : আমরা জানি যে 1 প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যারই উৎপাদক এবং জানি যে কোন সংখ্যার উৎপাদক সংখ্যাটির সমান অথবা সংখ্যাটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, যে কোন সংখ্যার ক্ষুদ্রতম উৎপাদক হইবে 1 এবং সংখ্যাটি নিজেই বৃহত্তম উৎপাদক হইবে।

∴ উহার উৎপাদকগুলির সেটটি একটি সসীম সেট। অতএব যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যাকে একটি সসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যার গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

প্র. 13. দেখাও যে, কোন বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল সব ক্ষেত্রে 1 হইবে। [A. I. H. S. '71]

সমাধান : যে কোন একটি বিজোড় সংখ্যা $2x+1$ লওয়া হইল।

এক্ষণে, $(2x+1)^2=4x^2+4x+1=4x(x+1)+1$.

∵ $4x(x+1)$ সংখ্যাটির একটি উৎপাদক 4, ∴ ইহা 4 দ্বারা বিভাজ্য।

আবার, ∵ x ও $x+1$ দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা,

∴ উহাদের মধ্যে একটি জোড় সংখ্যা হইবেই, সুতরাং তাহা 2 দ্বারা বিভাজ্য।

∴ $4x(x+1)$ সংখ্যাটি 4×2 বা 8 দ্বারা বিভাজ্য।

∴ যদি $4x(x+1)+1$কে 8 দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে 1 ভাগশেষ থাকিবে।

অতএব, যে কোন বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে সর্বক্ষেত্রে 1 ভাগশেষ থাকিবে।

প্র. 14. (i) মনে কর $A=\{2, 4, 6, \cdots\}$ এবং $B=\{3, 6, 9, \cdots\}$ যেখানে A সকল ধনাত্মক জোড় সংখ্যার সেট এবং B 3 দ্বারা বিভাজ্য সকল ধনাত্মক সংখ্যা। $A\cap B$ সেটটি নির্ণয় কর। [A. I. H. S. '71]

সমাধান : এখানে $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ এবং $B=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$

∴ $A\cap B=$সেট দুইটির ছেদ$=\{6, 12, 18, \cdots\}$

(ii) উপরের A ও B সেটের সঙ্গে যদি 12 অপেক্ষা বৃহত্তর নহে এরূপ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাগুলির সেট C থাকে, তবে $(A\cup B)\cap C$ সেটটি নির্ণয় কর।

এখানে $A=\{2. 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$ এবং $C=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 12\}$.

$\therefore \quad (A \cup B) \cap C=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, \cdots\} \cap \{1, 2, 3, 4, \cdots, 12\}$
$=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.

প্র. 15. (i) $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ এবং $C=\{0, 4, 5\}$ হইলে $A \cap B$, $B \cup C$ এবং $(A \cup B) \cap C$ সেটগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ এবং $C=\{0, 4, 5\}$.

$\therefore$ A-র কোন সংখ্যা B-র একটি সংখ্যা নহে।

$\therefore$ $A \cap B$ একটি শূন্য সেট, $\therefore$ $A \cap B=\phi$. [শূন্য সেটকে ϕ দ্বারা সূচিত করা হয়।]

$B \cup C=4$. $\therefore$ $(A \cup B) \cap C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{0,4,5\}$
$=\{4, 5\}$.

(ii) যে সকল মৌলিক সংখ্যা যুগ্ম সংখ্যা তাহাদের সেট লিখ।

(iii) দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গ. সা. গু. কত?

[A. I. H. S. '73]

প্র. 16. কোন প্রদত্ত অনুপাত সিদ্ধ কিনা তাহা কিরূপে নির্ণয় করিবে?

প্র. 17. সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা প্রয়োগ করিয়া নিম্নের অনুপাতগুলিকে $\frac{a}{b}$ আকারে প্রকাশ কর :

(i) 18 : 12, (ii) 15 : 165, (iii) 3 : 300, (iv) 88 : 66.

প্র. 18. একটি অঞ্চলের 1 : 35000 স্কেলে নক্সায় দুইটি বাড়ীর মধ্যে ·8 সে. মি. দূরত্ব দেখানো হইয়াছে। ঐ দুই বাড়ীর মধ্যে প্রকৃত দূরত্ব কত?

প্র. 19. নিম্নগুলির দ্বারা কি বুঝায় সংক্ষেপে লিখ :—

(i) গ. সা. গু., (ii) ভারযুক্ত গড়, (iii) ব্যস্ত অনুপাত, (iv) মধ্য সমানুপাতী (v) শতকরা হার, (vi) লাভ ও ক্ষতি।

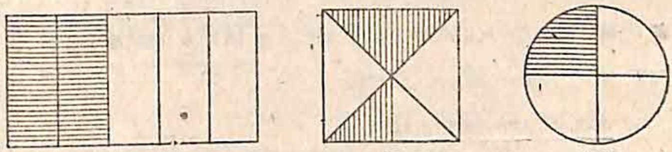
প্র. 20. কোন পরীক্ষার্থী একটি পরীক্ষায় ইংরাজীতে 46%, গণিতে 67%, সংস্কৃতে 72%, অর্থনীতিতে 58% ও রাজনীতিতে 53% নম্বর পাইয়াছে এবং স্থির হইয়াছিল যে, অন্য বিষয়ের তুলনায় ইংরাজী ও গণিতের প্রাপ্ত নম্বরকে দ্বিগুণ ভারযুক্ত করা হইবে। এক্ষেত্রে ভারযুক্ত পাটীগাণিতিক গড় নির্ণয় কর। [A. I. H. S. '66]

সমাধান : নির্ণেয় ভারযুক্ত গড়

$$=\frac{46\times2+67\times2+72\times1+58\times1+53\times1}{2+2+1+1+1}$$

$$=\frac{92+134+72+58+53}{7}=\frac{409}{7}=58\cdot4 \text{ (আসন্ন)।}$$

প্র. 21. নিম্নের ক্ষেত্রফলগুলিতে রেখাঙ্কিত অংশগুলি সমগ্র ক্ষেত্রের শতকরা কত ?



(i) (ii) (iii)

প্র. 22. নিম্নের শূন্যস্থানগুলি পূরণ কর :—

(i) A-র আয়ের 60% = B-র আয়ের 75% হইলে B'র আয় = A-র আয়ের —%.

(ii) 375 টাকার $13\frac{1}{3}$% = — টাকার $33\frac{1}{3}$%.

প্র. 23. A ও B এই শর্তে যৌথ কারবার আরম্ভ করিল যে তাহাদের লভ্যাংশ 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হইবে। B-র পক্ষে 10 : 6 বা 3 : 2 কোন্‌টি লাভজনক অনুপাত ?

বীজগণিত

প্র. 1. বাস্তব সংখ্যার মূলধর্ম সাহায্যে প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা xএর পক্ষে $x.0=0.x=0.$ [A. I. H. S. '71]

সমাধান। $x(0+0)=x.0+x.0$ [বিচ্ছেদ বিধি অনুসারে]।

আবার $0+0=0$ [শূন্যের ধর্ম হইতে]

$\therefore$ $x.0=x.0+x.0.$ উভয় পক্ষে $-(x.0)$ যোগ করিয়া পাই

$$x.0-(x.0)=-x.0+x.0+x.0,$$

বা, $0=-(x.0)+(x.0)+(x.0)$, বা, $0=0+x.0$, $\therefore$ $0=x.0$

অতএব, $x.0=0.x=0.$

প্র. 2. x^6-1কে মূলদ সহগযুক্ত মৌলিক বহুপদরাশির গুণফলরূপে প্রকাশ কর। [A. I. H. S. '70

সমাধান। $x^6-1=(x^3)^2-(1)^2=(x^3+1)(x^3-1)$
$$=\{(x)^3+(1)^3\}\{(x)^3-(1)^3\}$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$
দেখা যায় ইহা মূলদ সহগযুক্ত মৌলিক বহুপদরাশির গুণফল।

প্র. 3. $15x-21y+11=0$ ও $10x-14y+6=0$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান সেট (truth set) নির্ণয় কর। [A. I. H. S. '70].

সমাধান। প্রথম সমীকরণকে 2 দ্বারা ও দ্বিতীয় সমীকরণকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই $30x-42y+22=0$

এবং $30x-42y+18=0$

(বিয়োগ করিয়া) $4=0$

∴ xএর মান পাওয়া না যাওয়ায় এখানে সমাধান সেট শূন্য অর্থাৎ নির্ণেয় সেট ϕ. [ϕ শূন্য সেটের প্রতীক]।

প্র. 4. স্বাভাবিক সংখ্যার পরিসীমার মধ্যে xএর মান কত হইলে নিম্নের রাশিগুলি অর্থপূর্ণ হইবে ?

(i) $(x\div 3)\div 5$; (ii) $4x+5 \not> 3x+11$.

সমাধান। (i) $(x\div 3)\div 5=\frac{x}{3}\div 5=\frac{x}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{x}{15}$

এক্ষণে, ∵ প্রদত্ত রাশিটি স্বাভাবিক সংখ্যার পরিসীমার অন্তর্গত,

∴ ইহা অর্থপূর্ণ হইবে যদি $\frac{x}{15}$ কোন স্বাভাবিক সংখ্যার সমান হয়।

অতএব x হইবে 15-র কোন গুণিতক অর্থাৎ $x=\{15, 30, 45, \cdots\}$

(ii) এখানে $4x+5 \not> 3x+11$, ∴ $4x+5$ হয় $3x+11$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা উহার সমান হইবে, অর্থাৎ $4x+5\leqslant 3x+11$,

বা, $4x+5-5\leqslant 3x+11-5$, বা, $4x\leqslant 3x+6$.

বা, $4x-3x\leqslant 3x+6-3x$, বা, $x\leqslant 6$.

∴ $x=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

প্র. 5. (i) নিম্নের শূন্যস্থান পূরণ কর।

(i) যদি $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=\frac{11}{6}$, তবে $x+y=\cdots$

(ii) যদি $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}<1$ হয়, তবে $x+y$ সম্বন্ধে কি বলিবে ?

প্র. 6. {0, 1, 2, 3, 4}কে নিম্নের চলগুলির (variables) পরিবর্ত সেট ধরিয়া প্রত্যেকটির সমাধান সেট নির্ণয় কর।

(i) $4+x>6$, (ii) $3+n>4\frac{1}{2}$, (iii) $3y>2y$, (iv) $5+m<7$.

প্র. 7. নিম্নের প্রত্যেকটি বিবৃতিতে a ও b অখণ্ড সংখ্যা হইলে বিবৃতিটি সত্য, কিংবা সর্বদা সত্য নহে তাহা বল : (i) যদি $ab=0$ হয়, তবে $a=0$; (ii) যদি $ab=0$ হয়, তবে $b=0$; (iii) যদি $ab=0$ হয়, তবে a বা b কিংবা উভয়ই 0এর সমান ; (iv) যদি $a+0=b$ হয়, তবে $b=a$.

প্র. 8. নিম্নের শূন্যস্থানগুলি পূরণ কর :—

(i) x-অক্ষের সমীকরণ হয় ...

(ii) $y=mx+a$ ও $y=mx+b$ রেখাদ্বয় ......

(iii) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ ... ।

আদর্শ প্রশ্নমালা

উত্তরমালা

পাটীগণিত

2. (i) বিনিময় (ii) সংযোগ (iii) সংযোগ

3. (i) সংযোগ (ii) বিচ্ছেদ (iii) বিচ্ছেদ

5. $-3{\cdot}25, (0{\cdot}1), ({\cdot}25)^{{\cdot}5}, (\frac{3}{5})^{{\cdot}5}, \frac{4}{5}, 1{\cdot}5$

6. (i) $\frac{8}{3}$ (ii) $4\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{53}{30}$ 7. (i) (*a*) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$, (*b*) $\frac{8}{7}, \frac{9}{21}$.

7. (ii) (*a*) 2320, 2·32 ; (*b*) 321, 32·1 ; (*c*) 2·3, 2·3.

7. (iii) (*a*) 8 ; (*b*) 6 ; (*c*) 9. 8. (i) 6, (ii) অসীম 9. ক

10. (i) 1, (ii) 1. 15. (ii) {2, 4, 6, 8,···} ; (iii) 1,

17. (i) $\frac{3}{2}$, (ii) $\frac{1}{11}$, (iii) $\frac{1}{100}$; (iv) $\frac{4}{3}$ 18. 240m.

21. (i) 40% (ii) $37\frac{1}{2}$% (iii) 25%, 22. (i) 80% (ii) Rs. 150

23. 3 : 2.

বীজগণিত

5. (i) 11, (ii) $x+y<5$ 6. (i) $x=\{3, 4\}$; (ii) $n=\{2, 3, 4\}$

(iii) $x=\{1, 2, 3, 4\}$ (iv) $m=\{0, 1\}$.

7. (i) ও (ii) সর্বদা সত্য নহে ; (iii) ও (iv) সর্বদা সত্য

8. (i) $y=0$, (ii) সমান্তরাল, (iii) $y=c$.

পরিশিষ্ট

প্রাচীনকালের গণিত ও গণিতজ্ঞদের বিষয়ে আলোচনা

প্রাচীন ভারতে গণিত ও গাণিতিক

ইতিহাস-জিজ্ঞাসা আধুনিক সভ্যতার একটি বিশিষ্ট লক্ষণ। যে জাতি জাতীয় জীবনের আদিপর্বে সম্পূর্ণ উদাসীন, সে জাতি জীবন গঠনের যথার্থ পথ খুঁজিয়া পায় না। তাই জাতীয় জীবনে সকল চেতনার শ্রেষ্ঠ চেতনা ইতিহাস চেতনা।

প্রখ্যাত বিদগ্ধদের মতে যে গণিত সকল বিজ্ঞানের বিজ্ঞাতা, আধুনিক দর্শন ও সভ্যতার বাহন, মানবিক জীবনে প্রতিপদে ও বিজ্ঞানের সর্বশাখায় প্রযুক্ত, যে গণিত 'সকল বিজ্ঞানের রাণী, ও 'বিজ্ঞানের সেবক', সেই গণিতশাস্ত্র চর্চায় প্রাচীন ভারতের অবদান কি ছিল সেই ইতিহাসই এখানে সংক্ষিপ্তভাবে পর্যালোচনা করা হইতেছে।

পৃথিবীর অন্যান্য দেশের প্রতি-তুলনায় গণিতশাস্ত্রের অনুশীলনে ভারতবর্ষই পথিকৃৎ। মিশর, ব্যাবিলন, মেসোপটেমিয়া, চীন প্রভৃতি দেশে প্রাচীনকাল হইতে গণিতের অনুশীলন চলিলেও কালের গণনায় প্রাচীন ভারতের দাবি সর্বাগ্রগণ্য। ভারতে গণিতচর্চার সূত্রপাতের সঠিক লগ্ন নিরূপণে পর্বতপ্রমাণ বাধা থাকিলেও সিন্ধুনদের অববাহিকা অঞ্চলে সুপরিকল্পিত প্রাচীন নাগরিক সভ্যতার ধ্বংসাবশেষ মহেঞ্জোদাড়ো ও হরপ্পা আবিষ্কৃত হওয়ায় একথা প্রমাণিত হইয়াছে যে বৈদিক যুগের বহুপূর্বে এবং খ্রীষ্টজন্মের তিন সহস্র বৎসর পূর্বে ভারতে এক অভিজাত মানের সভ্যতা গড়িয়া উঠিয়াছিল। গণিতশাস্ত্র চর্চা ও সংখ্যার প্রয়োগে লিখন প্রণালী সেই সভ্যতার অজ্ঞাত ছিল না।

ভারতের আর্যঋষিরা অধ্যাত্মশাস্ত্রের সহিত গণিতশাস্ত্রেরও চর্চা করিতেন। অনেক আচার্য গণিতশাস্ত্রের গবেষণায় প্রখ্যাত-কীর্তি। পৃথিবীর প্রাচীনতম গ্রন্থ **বেদে** স্তূপ ও যজ্ঞবেদী নির্মাণে, যন্ত্র-প্রতীকাদির রচনায় গণিতশাস্ত্রের বহুল প্রয়োগ দেখা যায়। **ব্রাহ্মণেও** (খৃঃ পূঃ 2000) দেখা যায় ভারত গণিতশাস্ত্রে, বিশেষতঃ পাটীগণিত, জ্যোতির্বিদ্যা, জ্যামিতি বা রেখাগণিতে প্রাগগ্রসর। বৈদিক সাহিত্যে একাধিক স্থানে গণিতকে ময়ূরের মাথার শিখার ন্যায়, সাপের মাথার মণির ন্যায় তুলনা করা হইয়াছে ও সকল বিজ্ঞানের শীর্ষস্থানে গণিতের অবস্থিতি বলিয়া বর্ণিত হইয়াছে। খৃঃ পূঃ 800 অব্দে হিন্দু **'শুল্ব-সূত্রে'** পীথাগোরাসের উপপাদ্য নামে যাহা প্রচলিত, তাহারও প্রয়োগ দেখা যায়। **মহাভারতেও** গণিতের ও সংখ্যার প্রচুর উল্লেখ পাওয়া যায়। **'ললিত-বিস্তার'** গ্রন্থে উল্লিখিত আছে, ভগবান বুদ্ধ পাটীগণিতে দক্ষ ছিলেন। খ্রীঃ পূঃ 400 হইতে খ্রীষ্টাব্দ 400 (মৌর্য—গুপ্তযুগ) অব্দে গণিতশাস্ত্র, বিজ্ঞান ও সাহিত্যের প্রচুর প্রসার ও উন্নতি ঘটে। জ্যোতির্বিদ্যার প্রখ্যাত গ্রন্থ **'সূর্যসিদ্ধান্ত'**ও সমকালীন (আনুমানিক 400 খ্রীঃ) গ্রন্থ। সমসাময়িক গ্রন্থ **'পৌলিশ-সিদ্ধান্তে'** প্রাচীন ভারতে ত্রিকোণমিতির সারাংশ লিপিবদ্ধ হইয়াছে দেখা যায়।

ব্রাহ্মী সংখ্যা ও ব্রাহ্মী লিপি, স্বাভাবিক সংখ্যার লিখন প্রণালীর প্রচলন, দশমিক সংখ্যার উদ্ভাবন ও শূন্যের (0) প্রকাশনা ভারতীয় হিন্দু গণিতজ্ঞদেরই **প্রথম আবিষ্কৃত।** ব্যাবিলনীয়, মিশরীয়, গ্রীক গণিতেও শূন্যের ব্যবহার ছিল না। ভারতের আচার্যগণ বিরাট বিরাট সংখ্যার নামকরণ করিয়াছেন, যেমন—প্রযুত, অর্বুদ, ন্যর্বুদ, সমুদ্র, মধ্য, অন্ত, পরার্ধ ইত্যাদি। ইহা অন্য কোথাও নাই। গ্রীকদের গণিতে মিরিয়াড় অর্থাৎ দশ হাজারের উপরে আর সংখ্যার নামকরণ নাই।

ভারতের প্রাচীন ঐতিহ্য ও ইতিহাস আমরা সন্ধান করি না বলিয়াই আমাদের জ্ঞান পরিপূর্ণ হয় না ও উহা নিতান্ত আগন্তুক অতিথির ন্যায় অনাত্মীয় থাকিয়া যায়। প্রাচীন ভারতের গণিত-ইতিহাসের আলোচনা জ্ঞানকে উদ্বুদ্ধ করিবে, অনুসন্ধিৎসা বাড়াইবে, ভারতের ঐতিহ্যের প্রতি শ্রদ্ধাশীল করিবে এবং গণিত অধ্যয়নে প্রেরণা ও শক্তি যোগাইবে।

জীবনী ও চরিতপাঠের উপযোগিতাও অনস্বীকার্য। মনীষী ও মহাপুরুষদের জীবনী পাঠে উৎসাহ উদ্দীপনা পাওয়া যায় এবং নূতন প্রেরণা ও নব নব আগ্রহের সৃষ্টি হয়। সেই কারণে কতিপয় প্রখ্যাত গাণিতিকের সংক্ষিপ্ত জীবনী বিবৃত হইল।

1. **প্রথম আর্যভট :** স্বনামখ্যাত আর্যভট ভারতের শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিদগণের অন্যতম। গুপ্তযুগে পাটনার এক গ্রামে (কুসুমপুর) খুব সম্ভব 476 খ্রীষ্টাব্দে তিনি জন্মগ্রহণ করেন। তাঁহার রচিত গ্রন্থগুলির মধ্যে **'আর্যভটীয়'** গ্রন্থে 121টি শ্লোকে পাটীগণিত ও অন্যান্য গণিত, কাল ও ক্ষেত্রবিভাগ, গ্রহ ও গোলক সম্বন্ধে বর্ণিত হইয়াছে, অর্থাৎ ইহাতে বিশুদ্ধ গণিত এবং জ্যোতির্বিদ্যা ও তৎসংক্রান্ত গণিত আলোচিত হইয়াছে। আর্যভট তাঁহার পুস্তকে 10 গুণোত্তর সংখ্যা 10^8 পর্যন্ত ধরিয়াছেন, ইহাতে বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয়, সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়, দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান, π-এর মান নির্ণয় প্রভৃতি বিষয়ে আলোচনা করিয়াছেন।

তোমরা জানিয়া গর্বিত হইবে যে ইনিই সর্বপ্রথম পৃথিবীর সূর্যকে প্রদক্ষিণ ও আহ্নিক গতি'র কথা প্রচার করেন এবং চন্দ্র ও সূর্য গ্রহণের বৈজ্ঞানিক কারণ নির্ণয় করেন। অক্ষর দ্বারা সংখ্যা প্রকাশের এক অভিনব পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন। অনেকের মতে বৃত্তের পরিধির সহিত ব্যাসের অনুপাত (π) তিনিই সর্বপ্রথম নির্ণয় করেন। তিনি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির বর্গসমূহের ও ঘনসমূহের যোগফল নির্ণয় প্রণালী নির্ধারণ করেন।

তোমরা হয়ত ভাবিবে ইহাকে **প্রথম** আর্যভট কেন বলা হয়। মজার কথা এই যে পরবর্তীকালে আর এক জ্যোতির্বিদ্ প্রাচীন আর্যভটের প্রসিদ্ধি দেখিয়া তাঁহার **'আর্যসিদ্ধান্ত'** নামক জ্যোতিষগ্রন্থ যাহাতে খ্যাতিলাভ করে এই উদ্দেশ্যে আর্যভট এই ছদ্মনাম গ্রহণ করেন। এই দ্বিতীয় আর্যভট হইতে পৃথক্ করিবার জন্য প্রাচীন আর্যভটকে প্রথম আর্যভট বলা হয়।

2. **ব্রহ্মগুপ্ত :** ব্রহ্মগুপ্ত ভারতের একজন প্রসিদ্ধ জ্যোতিবিদ ও বীজগণিতাচার্য। অনেকের মতে তিনি 598 খ্রীষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। কাহারও মতে মুলতান প্রদেশে আবার কাহারও মতে উত্তর গুর্জরে তাঁহার নিবাস ছিল। তাঁহার '**ব্রহ্মস্ফুট সিদ্ধান্ত**' নামে প্রসিদ্ধ গ্রন্থে তিনি গণিত ও গোল জ্যোতিষ এবং পাটীগণিত ও বীজগণিত আলোচনা করিয়াছেন। ইহার বীজগণিত পরে আরব দেশের মাধ্যমে ইউরোপীয় দেশে পৌঁছায়। ব্রহ্মগুপ্ত তাঁহার পাটীগণিতে অন্যান্য বিষয়ের সহিত প্রগতি, অংশ বিভাগ, সামতলিক ক্ষেত্র সম্বন্ধে পরিমিতি, এবং আয়তন বিষয়ক সমাধান আলোচনা করিয়াছেন। তাঁহার বীজগণিতে $x^2+px-q=0$ এই আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের সূত্র হিসাবে দিয়াছেন, $x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$, ইহা হইতে অবশ্য একটি বীজ পাওয়া যায়।

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির তিনি দুই সেট মান দিয়াছেন ; যথা—
$2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2$ এবং $\sqrt{m},\ \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-n\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+n\right)$.

তোমরা পরে জ্যামিতিতে ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য নামে একটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য পড়িবে।

3. **মহাবীরাচার্য :** ইহার জন্মের সময় বা কাল এবং জন্মস্থান সঠিকভাবে জানা যায় না। তবে ব্রহ্মগুপ্তের পরে ও শ্রীধরাচার্যের পূর্বে বলিয়াই অনুমান করা হয়। তিনি মহীশূরে বসবাস করেন। তাঁহার রচিত বিখ্যাত গ্রন্থ '**গণিত-সার-সংগ্রহ**'। এই গ্রন্থ নয়টি অধ্যায়ে বিভক্ত এবং ইহাতে পাটীগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি প্রভৃতি বিভিন্ন বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এখানে উল্লেখযোগ্য এই যে ইনি ভগ্নাংশের ভাগের নিয়মটি এইভাবে বর্ণনা করিয়াছেন— "ভগ্নাংশের ভাগে ভাজকের লবকে হর ও হরকে লব করিয়া লিখিয়া তাহার দ্বারা ভাজ্য ভগ্নাংশকে গুণ করিতে হয়।"

4. **শ্রীধরাচার্য :** প্রসিদ্ধ দার্শনিক পণ্ডিত শ্রীধর সম্ভবতঃ 991 খ্রীষ্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। অনেকে অনুমান করেন ইনি হুগলী জেলায় জন্মগ্রহণ করেন। ইহার পিতার নাম বলদেবাচার্য ও মাতার নাম অচ্ছোকা দেবী। ইতি স্মার্ত শ্রীধরাচার্য হইতে ভিন্ন। ইহার রচিত গ্রন্থের নাম '**ত্রিশতিক**' বা '**গণিত-সার**'। ঐ গ্রন্থে তিনশত শ্লোক থাকায় উহার নামকরণ করেন ত্রিশতিক। সংখ্যা গণনা, পরিমাপ, স্বাভাবিক সংখ্যা, গুণ, ভাগ, শূন্য, বর্গফল, ঘনফল, ভগ্নাংশ, ত্রৈরাশিক, সুদ নির্ণয়, যৌথ কারবার অর্থাৎ সম্ভূয় সমুত্থান ও পরিমিতি বিষয় এই গ্রন্থে আলোচিত হইয়াছে। হিন্দু আচার্যদের মধ্যে শূন্য (0) সম্বন্ধে শ্রীধরের বিবৃতিই সর্বাপেক্ষা বিশদ। তিনি লিখিয়াছেন "কোন সংখ্যার সহিত শূন্য যোগ করিলে যোগফল সেই সংখ্যাই হয় ; যদি 0 বিয়োগ করা হয় তবে সংখ্যাটির কোন পরিবর্তন হয় না ; যদি 0-কে কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করা হয়, তবে গুণফল শূন্যই হয়।" তিনি 0 দ্বারা ভাগ করা সম্বন্ধে কিছু বলেন নাই।

কোন ভগ্নাংশকে ভাগ সম্বন্ধে তিনি ভাজকের অন্যোন্যক দ্বারা গুণ করার প্রণালী দিয়াছেন এবং তিনি বর্তমান πএর পরিবর্তে $\sqrt{10}$ ব্যবহার করিয়াছেন। দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের জন্য শ্রীধরাচার্যের পদ্ধতি তোমাদের পড়িতে হইবে।

শ্রীধরই সর্বপ্রথম পাটীগণিত হইতে বীজগণিতকে পৃথক্ করেন।

5. **ভাস্করাচার্য ঃ** ভারতের অন্যতম জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ ভাস্করাচার্য সম্ভবতঃ 1114 খ্রীষ্টাব্দে দাক্ষিণাত্যে বিদার গ্রামে জন্মগ্রহণ করেন। তাঁহার পিতার নাম মহেশ দৈবজ্ঞ। ভাস্করাচার্য আনুমানিক 1150 খ্রীষ্টাব্দে **'সিদ্ধান্ত শিরোমণি'** নামক তাঁহার প্রসিদ্ধ গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। এই গ্রন্থ (1) **লীলাবতী** (পাটীগণিত ও পরিমিতি), (2) **বীজগণিত**, (3) **গ্রহগণিতাধ্যায়** ও (4) **গোলাধ্যায়** এই চারিভাগে বিভক্ত। শেষ দুইটি গ্রন্থে তিনি বর্তুলের তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় পদ্ধতি, চন্দ্রের দ্রাঘিমা নির্ণয়, পৃথিবীর গোলত্ব ও মাধ্যাকর্ষণ শক্তির বর্ণনা করিয়াছেন।

তিনি শূন্য দ্বারা কোন সংখ্যাকে ভাগ সম্বন্ধে কোন স্পষ্ট ধারণা দেন নাই। দৃষ্টান্তস্বরূপ দিয়াছেন $10 \div 0 = \frac{10}{0}$ এবং $3 \div 3 = \frac{3}{0}$ এবং এই প্রসঙ্গে লিখিয়াছেন, "এই ভগ্নাংশটিকে যাহার হর শূন্য, একটি অনন্ত রাশি বলা হয়।" তিনি বীজগণিতে অমূলদ সংখ্যা ব্যবহার করিয়াছেন। তিনি কাল্পনিক সংখ্যাকে স্থান না দিয়া বলিয়াছেন, "কোন ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল হইতে পারে না, কারণ ইহা (ঐ রাশি) কোন বর্গই নহে।" তাঁহার গ্রন্থে সরল সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণও আলোচনা করিয়াছেন। পীথাগোরাসের সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির সম্বন্ধে ভাস্করাচার্য নিম্নরূপ দিয়াছেন—

$$\sqrt{m},\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-n\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+n\right),\ \text{বা},\ m, \frac{2m}{n^2-1}, \frac{m(n^2+1)}{n^2-1}$$

$$\text{বা},\quad \frac{m(n^2-1)}{n^2+1}, \frac{2mn}{n^2+1}, m.$$

'লীলাবতী' গ্রন্থের রচয়িতা সম্বন্ধে নানা মতামত আছে। অনেকের মতে ভাস্করাচার্য তাঁহার বিদুষী কন্যা লীলাবতীর নামে গ্রন্থটির নামকরণ করেন। আবার অনেকের মতে তাঁহার কন্যা লীলাবতীই এই গ্রন্থটি রচনা করেন। ভাস্করাচার্যের গ্রন্থটির লীলাবতী নামকরণের পিছনে এক করুণ উপাখ্যান প্রচলিত আছে।

ভাস্করাচার্য গণনা করিয়া জানিতে পারেন তাঁহার কন্যার বিবাহ হইলে পতি-বিয়োগের যোগ আছে। ইহা খণ্ডনের জন্য তিনি গণনার মাধ্যমে বিবাহের এক শুভক্ষণ নির্ধারণ করেন। সেই সময় নির্ণয় করার জন্য তিনি একটি সচ্ছিদ্র পাত্র জলে এমন হিসাব করিয়া ভাসাইয়া দেন যে ঐ ছিদ্রের মধ্য দিয়া জল প্রবেশ করিয়া পাত্রটিকে ডুবাইলেই ঐ নির্দিষ্ট সময় উপস্থিত হইবে। স্বাভাবিক কৌতুহল বশতঃ লীলাবতী উহা দেখিতে থাকেন

হঠাৎ তাঁহারই শিরোভূষণ হইতে একখণ্ড মুক্তা ঐ পাত্রের মধ্যে পড়িয়া ছিদ্রটি রুদ্ধ করিয়া ফেলিল। ইহার ফলে ঐ শুভ লগ্নের সঠিক হিসাব সম্ভব হইল না। ভাস্করাচার্য তাঁহার কন্যার বিধিলিপি খণ্ডন করিতে না পারিয়া সান্ত্বনার জন্য কন্যার নামে গ্রন্থটির নামকরণ করেন।

সম্রাট আকবরের নির্দেশে 'লীলাবতী' গ্রন্থটি ফার্সী ভাষায় অনূদিত হয়।

6. **লীলাবতী :** ইনি ভারতের একজন অসামান্য বুদ্ধিমতী ও বিদুষী রমণী। লীলাবতীর জন্মকাল খ্রীষ্টীয় দ্বাদশ শতক। বিবাহের অব্যবহিত পরেই লীলাবতীর পতিবিয়োগ ঘটিলে ভাস্করাচার্য কন্যাকে স্বগৃহে রাখিয়া অতি যত্নে বিদ্যাশিক্ষা দেন। ভাস্করাচার্যের 'সিদ্ধান্ত শিরোমণি' গ্রন্থের একটি খণ্ড লীলাবতী রচনা করেন। সেইজন্য তাঁহার পিতা ঐ খণ্ডের নাম দিলেন 'লীলাবতী'। ইহাতে বিবৃত পাটীগণিত ও বীজগণিতের সূত্রাবলী অদ্যাবধি লীলাবতীর নামেই প্রসিদ্ধ। "পাটীনাম্ সঙ্কলিত-ব্যবকলিত-গুণনভজনাদীনাং ক্রমঃ তেন যুক্তং গণিতং পাটীগণিতম্"—ইহা লীলাবতীর একটি টীকা। ইহা হইতে জানা যায় 'পাটী' শব্দের অর্থ ক্রম বা প্রণালী এবং গণিত শাস্ত্রের যে অংশে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রণালী আলোচিত হয় তাহাকে পাটীগণিত বলে।

ইহা ব্যতীত পরে তোমরা আরো অনেক প্রখ্যাত হিন্দু গণিতবিদ্দের জীবনী পাঠ করিয়া গণিতের বহু বিষয় জানিতে পারিবে।

পাশ্চাত্য দেশের কয়েকজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ

পাশ্চাত্যদেশের কতিপয় প্রখ্যাত গাণিতিকের জীবনী নিম্নে আলোচনা করা হইল। ইহাদের উদ্ভাবিত অনেক বিষয়ই তোমরা পাঠ্যপুস্তকে পাঠ করিবে।

1. **থ্যালেস (Thales) :** গ্রীক্ গণিতজ্ঞদের মধ্যে ইনিই প্রথম বিজ্ঞান-ভিত্তিক গণিত শাস্ত্রের বিভিন্ন শাখায় গবেষণা করেন। তাঁহার জন্ম-সময়, স্থান ইত্যাদির বিষয়ে বিশেষ কিছুই জানা যায় না। প্রথম জীবনে তিনি একজন প্রখ্যাত ব্যবসায়ী, মধ্যকালে একজন রাজনীতিজ্ঞ ও শেষ জীবনে একজন গণিতবিদ, জ্যোতির্বিদ ও দার্শনিক হিসাবে জীবন অতিবাহিত করেন। তিনি জ্যোতির্বিদ্যায় বিশেষ পারদর্শী ছিলেন। কেহ কেহ বলেন তিনি চন্দ্র ও সূর্যগ্রহণের সঠিক সময় নির্ধারণ করিতে পারিতেন। তাঁহাকে গ্রীস দেশের জ্যামিতি, পাটীগণিত ও জ্যোতির্বিদ্যার জনক বলা হয়। তিনি পীথাগোরাসের শিক্ষাগুরু ছিলেন। অনেকের মতে—থ্যালেস ব্যতীত পীথাগোরাসকে পাওয়া সম্ভব ছিল না।



রোমের যাদুঘরে রক্ষিত থ্যালেসের আবক্ষ মূর্তি

2. **পীথাগোরাস** (Pythagoras): যতদূর জানা যায় বিখ্যাত গ্রীক দার্শনিক পীথাগোরাস গ্রীসীয় উপনিবেশ (Colony) সামোসে (Samos) জন্মগ্রহণ করেন। তাঁহার জীবনকাল আনুমানিক খ্রীষ্টপূর্ব 580—495 অব্দ। তিনি দক্ষিণ ইতালীর এক উপনিবেশে বসতি করেন। অনেকে বলেন তিনি ইতালীর লোক, শৈশবে পিতার সহিত সামোসে আসেন। তাঁহার জন্মকাল, জন্মস্থান, পিতৃ-পরিচয় ইত্যাদি বিষয়ে মতান্তর দেখা যায়। কিন্তু তিনি যে প্রাচীনকালের একজন অন্যতম গণিতজ্ঞ ও সমকালীন সভ্যতার শ্রেষ্ঠ উন্নয়নকারী এ-বিষয়ে কাহারও সন্দেহ নাই।

তাঁহার শিক্ষক থ্যালেসের পরামর্শে তিনি মিশরে যান এবং সেখানে বিশেষ অভিজ্ঞতা লাভ করেন। তিনি মিশরের যাজকদের নিকট পরিমিতি সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করেন। ওখানকার মন্দিরের মেঝেতে যে সকল চিত্রিত মোসাইক পাথর বসান ছিল তাহাতে একটি বর্গক্ষেত্রকে ঘিরিয়া একটি বৃহত্তর বর্গক্ষেত্র আছে দেখিয়া "সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের বর্গ অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান" তাঁহার এই প্রসিদ্ধ জ্যামিতিক উপপাদ্য উদ্ভাবন করেন। ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি বিষয়ক প্রতিজ্ঞাও তাঁহার প্রতিষ্ঠিত পীথাগোরীয় সম্প্রদায় প্রমাণ করিয়াছিল। পীথাগোরাস মিশর ও ভারতবর্ষ পরিভ্রমণ করিয়া গণিত ও দর্শন শাস্ত্রে প্রচুর জ্ঞান অর্জন করেন। জ্যামিতির ন্যায় তিনি পাটীগণিতকেও উচ্চ স্থান দিয়াছিলেন। তিনি সঙ্গীতপ্রিয় ছিলেন এবং ইহাতেও তাঁহার অবদান যথেষ্ট। আত্মার দেহ হইতে দেহান্তর ঘটে এই দার্শনিক মতবাদ তিনি পোষণ করিতেন। তিনি কোন লিখিত পুস্তক রাখিয়া যান নাই। তিনি শিষ্যগণকে মুখে মুখে শিক্ষা দিতেন। শোনা যায় কোন ঘাতকের হস্তে তাঁহার মৃত্যু হয়।



পীথাগোরাসের চিত্রাঙ্কিত সামসীয় মুদ্রা

3. **ইউক্লিড** (Euclid): আলেকজান্দ্রিয়ার খ্যাতনামা ব্যক্তিগণের মধ্যে ইউক্লিডের নাম সর্বাপেক্ষা প্রসিদ্ধ ছিল। ইনি একজন বিখ্যাত গাণিতিক। ইহারও জন্মস্থান, জন্মকাল প্রভৃতি বিষয়ে সঠিক কিছু জানা যায় না। তিনি গ্রীক অথবা মিশরের অধিবাসী ছিলেন তাহার যথার্থ প্রমাণ নাই। অনুমান করা হয় যে তাঁহার জীবনকাল 300 খ্রীষ্টাব্দের নিকটবর্তী কোন এক সময়ে। আলেকজাণ্ডারের মৃত্যুর পর টলেমী (Ptolemy) একটি বিশ্ববিদ্যালয় স্থাপন করিয়া ইউক্লিডকে শিক্ষকরূপে লইয়া যান। প্রখ্যাত শিক্ষক ইউক্লিড গণিত পুস্তক রচনায় বিরাট সাফল্য লাভ করেন। তাঁহার পুস্তকের বহু সংস্করণ হইয়াছে। ইহার প্রধান কীর্তি 'Elements' নামক প্রসিদ্ধ পুস্তক। ইহাতে

ব্যবহৃত যুক্তিসমূহ জ্যামিতিক যুক্তির একমাত্র ও নির্ভুল সোপান বলিয়া বিবেচিত হয়। এই Elements-এ তেরোখানি পুস্তকের সন্নিবেশ আছে। প্রথম হইতে ষষ্ঠ পুস্তকের মধ্যে রেখা, ক্ষেত্রফল, বৃত্ত, সামতলিক ক্ষেত্র সম্বন্ধীয় আলোচনা আছে। সপ্তম হইতে নবম পর্যন্ত পুস্তকে সংখ্যাতত্ত্ব, গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয়, গুণোত্তর শ্রেণী ও সূচক পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। দশম পুস্তকে a ও b-কে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ধরিয়া $(a^{\frac{1}{2}} \pm b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ শ্রেণীর অমূলদ সংখ্যা এবং একাদশ খণ্ডে ঘনজ্যামিতি আলোচিত হইয়াছে। ইহার জ্যোতির্বিদ্যা, সঙ্গীত, দৃষ্টি সম্বন্ধীয় আলোক বিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়েও পুস্তক আছে।

4 **কোপার্নিকাস** (Copernicus)—পোলাণ্ডের থর্নে 1473 খ্রীষ্টাব্দে 19শে ফেব্রুয়ারী বিখ্যাত জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ নিকোলাস কোপার্নিকাস জন্মগ্রহণ করেন। তিনি ক্রাকাউ (Cracow) বিশ্ববিদ্যালয়ে পড়াশুনা করেন। আইন, চিকিৎসাবিদ্যা ও জ্যোতির্বিদ্যা সম্বন্ধে পড়াশুনা করেন. Padua এবং Bologna বিশ্ববিদ্যালয়ে। তিনি রোমের পোপ ষষ্ঠ আলেকজাণ্ডারের অনুপ্রেরণায় জ্যোতির্বিদ্যা গবেষণা করেন। 1530 খ্রীষ্টাব্দের মধ্যেই বিশ্বব্রহ্মাণ্ড সম্বন্ধীয় তাঁহার যে যুগান্তকারী বিখ্যাত তত্ত্ব তাহার কাজ শেষ হয়। কিন্তু ইহা 1543 খ্রীষ্টাব্দে যখন প্রকাশিত হয় তখন তিনি সন্ন্যাসরোগে পঙ্গু হইয়া শয্যাশায়ী। পাশ্চাত্য জগতে ইনিই প্রথম প্রকাশ করেন যে, সূর্য সৌরজগতের কেন্দ্র এবং পৃথিবী ও অন্যান্য গ্রহ সূর্যের চারিদিকে ঘুরিতেছে। বলা হয়—কলম্বাস একটি নূতন জগৎ আবিষ্কার করেন, কিন্তু কোপার্নিকাস কোটি কোটি জগৎ আবিষ্কার করেন। 1543 খ্রীষ্টাব্দে 24শে মে ফ্রয়েনবার্গে তাঁহার মৃত্যু হয়।


প্রাচীন খোদাই হইতে গৃহীত

5. **যোহান কেপলার** (Johan Kepler): কেপলার 1571 খ্রীষ্টাব্দে জার্মানীর ষ্টুটগার্টে জন্মগ্রহণ করেন। যদিও তিনি একজন জ্যোতির্বিদ্ হিসাবে প্রখ্যাত, কিন্তু গণিতজ্ঞ হিসাবেও উচ্চস্থান অধিকার করেন। জ্যামিতি, বীজগণিত, ক্যালকুলাস, লগারিদম্ প্রভৃতির উপর তাঁহার গবেষণা ও অবদান সুবিদিত।

তাঁহার পারিবারিক জীবন মোটেই শান্তিপূর্ণ ছিল না ও সংসারে আর্থিক অনটন ছিল। 1630 খ্রীষ্টাব্দে 14ই নভেম্বর রিজেন্সবার্গে তাঁহার মৃত্যু হয়।

6. **নিউটন (Isaac Newton):** লিন্‌কনসায়ারের উলস্‌থ্রোপে এক কৃষক পরিবারে ক্ষণজন্মা পুরুষ নিউটন 1642 খ্রীষ্টাব্দে 25 শে ডিসেম্বর জন্ম গ্রহণ করেন। এই প্রখ্যাত ব্রিটিশ বৈজ্ঞানিক ও গণিতবিদের পরিচয় ও অনেক গল্প তোমরা পূর্বেই হয়তো জানিয়া থাকিবে। তিনি নিজেই বলিয়াছেন যে, প্রথম ছাত্র-জীবনে তিনি খুবই অমনোযোগী ছিলেন ও পরীক্ষায় খুব খারাপ ফল করিতেন। তিনিই পরে পৃথিবীর শ্রেষ্ঠ বৈজ্ঞানিকদের মধ্যে অন্যতম বলিয়া পরিগণিত হন। তাঁহার 'মাধ্যাকর্ষণ শক্তির' আবিষ্কারের কথা ও 'আলোকের গতিনির্ণয়' বিষয়ে তোমরা পূর্বেই জানিয়াছ।



(i) পদকে নিউটনের ছবি



(ii) - নিউটনের স্বাক্ষর

তিনি সারা জীবন বিজ্ঞান ও গণিতশাস্ত্রের চর্চা করেন এবং বহু বিষয় আবিষ্কার করিয়া জগতের অমরত্ব লাভ করেন। তিনি দেশের বহু গৌরবজনক পদের অধিকারী হন। ইংলণ্ডের রাণী 'এ্যানে' (Anne) তাঁহাকে নাইট পদবী দিয়া সম্মানিত করেন।

বীজগণিত ও সমীকরণের উপর নিউটনের তত্ত্ব 1707 খ্রীষ্টাব্দে "Arithmeticia Universalis" নামক পুস্তকে প্রকাশিত হয়। ইহা তাঁহার বিভিন্ন বক্তৃতার সঙ্কলন।

মাধ্যাকর্ষণ শক্তি সম্বন্ধে তাঁহার গবেষণা বিখ্যাত পুস্তক 'প্রিনসিপিয়াতে' বর্ণিত হইয়াছে।

1727 খ্রীষ্টাব্দে 20শে মার্চ, চুরাশি বৎসর বয়সে কেন্‌সিঙ্গটনে তাঁহার মৃত্যু হয়। ওয়েস্টমিনস্টার এ্যাবেতে তাঁহার সমাধি সৌধ আজও বিদ্যমান।